第五章　数列

5.1　数列基础

5.1.1　数列的概念+5.1.2　数列中的递推

易错记

1-1. C　【解析】由 $a_n=S_{n-1}(n\geqslant 2)$，得 $a_{n+1}=S_n$，

两式相减，得 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$.

又∵ $a_1=1, a_2=a_1=1$，∴ $a_n\neq 0$，

∴ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2(n\geqslant 2)$，

∴ $a_n=a_2\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=a_2\cdot 2^{n-2}=2^{n-2}(n\geqslant 3)$.

∵ $a_2=1=2^{2-2}$，即 a_2 满足上式，

∴ $a_n=2^{n-2}(n\geqslant 2)$.

2-1. A　【解析】∵ $2^{10}=1\ 024, 2^{11}=2\ 048$（提示：建议记住 $2^{10}=1\ 024$），∴ 根据指数函数单调性可知，$\left\{\dfrac{1}{2^n-2\ 022}\right\}$ 在 $1\leqslant n\leqslant 10$ 时为递减数列且各项均为负数，在 $n\geqslant 11$ 时也为递减数列但各项均为正数，故数列最小项为第 10 项，最大项为第 11 项.故选 A.

3-1. C　【解析】由 $b_{n+1}-b_n=(n+1)^2-\lambda(n+1)-3-(n^2-\lambda n-3)=(2n+1)-\lambda>0$，得 $\lambda<2n+1$（提示：参变分离），即 $\lambda<(2n+1)_{\min}$，∴ $\lambda<3$，故选 C.

题型诀

1-1. AB　【解析】数列 10,9,8,7 与由实数 10,9,8,7 组成的集合{10,9,8,7}是两个不同的概念，故 A 项错误；根据数列的定义，如果组成两个数列的数相同，但排列顺序不同，那么这两个数列是不同的数列，故 B 项错误；同一个数在数列中可以重复出现，如常数列 1,1,1,…，故 C 项正确；当 $a=c$ 时，数列 a,b,c 和 c,b,a 表示同一数列，故 D 项正确.

2-1. C　【解析】数列 1,−2,4,−8,16,

…中,

$a_1=(-1)^{1-1}\times2^{1-1}=(-2)^{1-1}$,

$a_2=(-1)^{2-1}\times2^{2-1}=(-2)^{2-1}$,

$a_3=(-1)^{3-1}\times2^{3-1}=(-2)^{3-1}$,

$a_4=(-1)^{4-1}\times2^{4-1}=(-2)^{4-1}$,

$a_5=(-1)^{5-1}\times2^{5-1}=(-2)^{5-1}$,

……

$\therefore a_n=(-2)^{n-1}$. 故选 C.

2-2. B 【解析】数列 $0,\frac{3}{2},4,\frac{15}{2},\cdots$,即数列 $\frac{1^2-1}{2},\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{2},\frac{4^2-1}{2},\cdots$,

所以该数列的一个通项公式为 $\frac{n^2-1}{2}$.

2-3. D 【解析】方法一:前 4 项符号前面的整数部分依次为 $3=2\times1+1,5=2\times2+1,7=2\times3+1,9=2\times4+1$,则第 n 项的整数部分为 $2n+1$,符号后面的分数部分的分子依次为 1,3,5,7,是正奇数,分母依次为 2,4,8,16,是 2 的指数幂,则第 n 项符号后面的分数部分为 $\frac{2n-1}{2^n}$,按减、加相间分别将各项的两部分连接起来,

可得 $a_n=2n+1+(-1)^n\frac{2n-1}{2^n}$. 故选 D.

方法二:利用排除法,当 $n=1$ 时,排除 BC;当 $n=3$ 时,排除 A. 故选 D.

3-1. C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-n+1$,所以 $a_5=25-5+1=21$. 故选 C.

3-2. C 【解析】因为 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}$,

所以 $a_2=\frac{a_1-1}{a_1+1}=\frac{1}{3},a_3=\frac{a_2-1}{a_2+1}=-\frac{1}{2},a_4=\frac{a_3-1}{a_3+1}=-3$. 故选 C.

3-3. D 【解析】因为 $1=3^{7\times0},3^7=3^{7\times1},3^{14}=3^{7\times2},3^{21}=3^{7\times3}$,所以符合题意的一个通项公式为 $a_n=3^{7(n-1)}$. 由 $3^{7(n-1)}=3^{98}$,解得 $n=15$,所以 3^{98} 是这个数列的第 15 项. 故选 D.

3-4. C 【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,且 $a_n=\begin{cases}2a_{n-1}-1, n\text{ 为偶数},\\2a_{n-1}+2, n\text{ 为奇数},\end{cases}$ 所以 $a_2=2a_1-1=1,a_3=2a_2+2=4,a_4=2a_3-1=7,a_5=$

$2a_4+2=16$. 所以解下 5 个环所需的最少移动次数为16. 故选 C.

4-1. C 【解析】$\because a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}, a_1=2$,

$\therefore a_{10}=a_{10}-a_9+a_9-a_8+\cdots+a_2-a_1+a_1=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}+\cdots+1-\dfrac{1}{2}+2=3-\dfrac{1}{10}=\dfrac{29}{10}$. 故选 C.

4-2. $\dfrac{4n-3}{4n-2}$ 【解析】由题意知,$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$. 当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-5}-\dfrac{1}{2n-3}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n-1}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4n-3}{4n-2}$. 当 $n=1$ 时,也满足该式,故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{4n-3}{4n-2}$.

4-3. 【解】因为 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}, a_1=1$,

所以 $a_n\neq0$,

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a_n}$,

所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$.

所以$\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{a_4}-\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}(n\geqslant2)$.

将上述 $n-1$ 个等式左右两边分别相加,

得$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{n-1}{2}$,

所以$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2}(n\geqslant2)$,

所以 $a_n=\dfrac{2}{n+1}(n\geqslant2)$.

因为 $a_1=1=\dfrac{2}{1+1}$,也满足 $a_n=\dfrac{2}{n+1}$,

所以 $a_n=\dfrac{2}{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

5-1. $\dfrac{2n+1}{3}$ 【解析】$a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\dfrac{5}{3}\times\dfrac{7}{5}\times\cdots\times\dfrac{2n+1}{2n-1}=\dfrac{2n+1}{3}$

$(n\geq 2)$，又 $a_1=1$ 也符合上式，

所以 $a_n=\frac{2n+1}{3}$.

5-2. $\frac{1}{n}$ 【解析】因为 $a_na_{n+1}+a_{n+1}^2-na_n^2+na_{n+1}^2=0$，

所以 $(a_n+a_{n+1})a_{n+1}+n(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=0$，

所以 $(a_{n+1}+a_n)[a_{n+1}+n(a_{n+1}-a_n)]=0$，

所以 $(a_{n+1}+a_n)[(n+1)a_{n+1}-na_n]=0$.

因为数列 $\{a_n\}$ 为正项数列，

所以 $(n+1)a_{n+1}=na_n$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$，

所以当 $n\geq 2$ 时，$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}$，

所以 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{n}$，又 $a_1=1$，所以 $a_n=\frac{1}{n}(n\geq 2)$. 经验证，$a_1=1$ 也符合上式，故 $a_n=\frac{1}{n}$.

6-1. D 【解析】方法一：因为 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $a_{n+1}-a_n>0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立.

已知 $a_n=n^2-2tn+5$，则 $a_{n+1}=(n+1)^2-2t(n+1)+5$.

所以 $a_{n+1}-a_n=[(n+1)^2-2t(n+1)+5]-(n^2-2tn+5)=n^2+2n+1-2tn-2t+5-n^2+2tn-5=2n+1-2t>0$，即 $2t<2n+1$ 恒成立，

故 $2t<3$，即 $t<\frac{3}{2}$，故选 D.

方法二：$a_n=n^2-2tn+5=(n-t)^2+5-t^2$，由于 $n\in\mathbf{N}_+$，且 $\{a_n\}$ 是递增数列，

结合二次函数的图象，可得 $t<\frac{3}{2}$，故选 D.

6-2. A 【解析】由题意得数列 $\{a_n\}$ 为递增数列等价于“对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，$a_{n+1}-a_n>0$ 恒成立”，得 $3^{n+1}+k(n+1)-2-(3^n+kn-2)>0$，即 $k>-2\cdot 3^n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立，故 $k>(-2\cdot 3^n)_{\max}=-6$，所以“$k>-1$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的充分不必要条件.

6-3. 【解】(1) 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.

证明:在数列$\{a_n\}$中,$a_n=1+\frac{6}{n}$,

则 $a_{n+1}=1+\frac{6}{n+1}$,

则 $a_{n+1}-a_n=\left(1+\frac{6}{n+1}\right)-\left(1+\frac{6}{n}\right)=\frac{6}{n+1}-\frac{6}{n}=-\frac{6}{n(n+1)}<0$,故数列$\{a_n\}$是递减数列.

(2)若 $a_n=n$,即 $1+\frac{6}{n}=n$,变形得 $n^2-n-6=0$,

解得 $n=3$ 或 $n=-2$(舍去),故 $n=3$.

7-1. 10　9　【解析】因为 $a_n=\frac{n-\sqrt{90}}{n-\sqrt{91}}=1+\frac{\sqrt{91}-\sqrt{90}}{n-\sqrt{91}}$,

由反比例函数的性质得,

当 $1\leqslant n\leqslant 9$ 时,数列$\{a_n\}$是递减数列,且 $a_9\leqslant a_n<1$,

当 $n\geqslant 10$ 时,数列$\{a_n\}$是递减数列,且 $1<a_n\leqslant a_{10}$,

所以数列$\{a_n\}$的最大项为 a_{10},最小项为 a_9.

7-2.【解】(1)$S_1=a_1=\frac{1}{2}$,

由 $2S_2-S_2\cdot S_1=1$,得 $S_2=\frac{1}{2-S_1}=\frac{2}{3}$,同理可得 $S_3=\frac{1}{2-S_2}=\frac{3}{4}$,$S_4=\frac{1}{2-S_3}=\frac{4}{5}$,

所以猜想 $S_n=\frac{n}{n+1}$.

(2)由(1)知,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$,

当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$满足上式,

所以 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$,

所以 $b_n=\frac{na_n}{1+30a_n}=\frac{n}{n^2+n+30}=\frac{1}{n+\frac{30}{n}+1}$,$n\in\mathbf{N}_+$,

设 $f(x)=x+\frac{30}{x}(x>0)$,则有 $f(x)$ 在$(0,\sqrt{30})$上单调递减,在$(\sqrt{30},+\infty)$上单调递增,

因为 $n\in\mathbf{N}_+$,且 $f(5)=f(6)=11$,

所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时，b_n 有最大值$\frac{1}{12}$.

8-1. A 【解析】因为数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+a_n}{1-\sqrt{3}a_n}(n\in\mathbf{N}_+)$，

所以 $a_2=\frac{\sqrt{3}+a_1}{1-\sqrt{3}a_1}=\sqrt{3}$，$a_3=\frac{\sqrt{3}+a_2}{1-\sqrt{3}a_2}=\frac{2\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3}$，$a_4=\frac{\sqrt{3}+a_3}{1-\sqrt{3}a_3}=0$，

以此类推可知，$a_{n+3}=a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，因此，$a_{2\,023}=a_{3\times674+1}=a_1=0$.

8-2. C 【解析】因为 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, a_n<\frac{1}{2},\\ 2a_n-1, a_n\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ $a_1=\frac{4}{5}$，

所以 $a_2=2a_1-1=2\times\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$，

$a_3=2a_2-1=2\times\frac{3}{5}-1=\frac{1}{5}$，

$a_4=2a_3=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$，

$a_5=2a_4=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}=a_1$，

所以数列$\{a_n\}$是以 4 为周期的周期数列，所以 $a_{2\,026}=a_{4\times506+2}=a_2=\frac{3}{5}$.

9-1. $\begin{cases}1, n=1,\\ 2\cdot3^{n-1}, n\geqslant2\end{cases}$ 【解析】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3-2=1$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-2-3^{n-1}+2=2\cdot3^{n-1}$.

显然 $a_1=1$ 不满足上式，所以 $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ 2\cdot3^{n-1}, n\geqslant2.\end{cases}$

9-2. 【解】$\because S_n=n^2+7n$，$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=8$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+7n-(n-1)^2-7(n-1)=2n+6$.

当 $n=1$ 时，上式也成立，故 $a_n=2n+6$，$n\in\mathbf{N}_+$.

10-1. C 【解析】当 $n=1$ 时，$a_2+2S_1=2+1$，由 $S_1=a_1=1$ 可知，$a_2=1$；当 $n\geqslant2$ 时，由 $a_{n+1}+2S_n=2n+1$ 得，$a_n+2S_{n-1}=2n-1$，两式相减可得 $a_{n+1}-a_n+2a_n=2$，即 a_n+

$a_{n+1}=2$,所以 $a_n=1(n\geqslant 2)$(提示:将 $a_2=1$ 代入上式迭代即可求得),又 $a_1=1$ 也满足上式,所以 $a_n=1(n\in \mathbf{N}_+)$,可得 $S_n=n$,所以 $S_{2\,022}=2\,022$. 故选 C.

10-2. C 【解析】在 $S_{n+m}=S_n+S_m$ 中,令 $m=1$ 得,$S_{n+1}=S_n+S_1$,即 $S_{n+1}=S_n+a_1$,所以 $S_{n+1}-S_n=a_1=1$. 令 $n=9$,得 $a_{10}=S_{10}-S_9=a_1=1$,故选 C.

10-3. 4 044 【解析】由 $S_n-(-1)^n a_n=2n-6+\frac{1}{2^n}(n\in \mathbf{N}_+)$,

得 $S_n=(-1)^n a_n+2n-6+\frac{1}{2^n}$.

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^n a_n+2n-6+\frac{1}{2^n}-(-1)^{n-1}a_{n-1}-(2n-2)+6-\frac{1}{2^{n-1}}=(-1)^n a_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}-\frac{1}{2^n}+2$,

当 n 为奇数时,$2a_n+a_{n-1}=2-\frac{1}{2^n},n\geqslant 3$;

当 n 为偶数时,$a_{n-1}=\frac{1}{2^n}-2,n\geqslant 2$,

所以 $a_1=\frac{1}{2^2}-2,a_3=\frac{1}{2^4}-2,a_5=\frac{1}{2^6}-2,\cdots$,

$a_{2\,021}=\frac{1}{2^{2\,022}}-2$,

$a_2=6-\frac{1}{2^2},a_4=6-\frac{1}{2^4},a_6=6-\frac{1}{2^6},\cdots$,

$a_{2\,022}=6-\frac{1}{2^{2\,022}}$,

所以 $a_1+a_2=4,a_3+a_4=4,\cdots,a_{2\,021}+a_{2\,022}=4$,

所以 $S_{2\,022}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2\,022}=1\,011\times 4=4\,044$.

11-1. C 【解析】由已知可得 $a_3=\frac{a_1a_2a_3}{a_1a_2}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$. 故选 C.

12-1. A 【解析】利用新定义可得 $a_n=\frac{2^n}{n^2}$,结合函数 $y=2^x$ 与 $y=x^2$ 的图象与性质知,当 $x>4$ 时,总有 $2^x>x^2$,即当 $n>4$ 时,$a_n>1$ 且递增,因此只需要比较 $n=1,2,3,4$ 时 a_n 的值. 又 $a_1=2,a_2=1,a_3=\frac{8}{9},a_4=1$,故 $a_k=\frac{8}{9}$. 故选 A.

12-2. 1 【解析】因为 $a_n=\text{INT}\left(\frac{1}{7}\times\right.$

2^n), $b_1=a_1$, $b_n=a_n-2a_{n-1}$ ($n\in\mathbf{N}_+$, $n\geqslant 2$),

所以 $a_1=0, b_1=0$,

$a_2=0, b_2=0-2\times 0=0$,

$a_3=1, b_3=1-2\times 0=1$,

$a_4=2, b_4=2-2\times 1=0$,

$a_5=4, b_5=4-2\times 2=0$,

$a_6=9, b_6=9-2\times 4=1$,

$a_7=18, b_7=18-2\times 9=0$,

…

所以 $b_{n+3}=b_n$, 故 $b_{2\,019}=b_{673\times 3}=b_3=1$.

巩固练

1. C 【解析】根据定义,属于无穷数列的是选项 A,B,C(用省略号表示数列项数无限),属于递增数列的是选项 C,D,故满足题目要求的是选项 C.

2. C 【解析】依题意, $n^2+2=146$ ($n\in\mathbf{N}_+$),解得 $n=12$,

所以 146 是该数列的第 12 项. 故选 C.

3. A 【解析】$\because a_1=-\dfrac{1}{4}, a_n=1-\dfrac{1}{a_{n-1}}$,

$\therefore a_2=1-\dfrac{1}{a_1}=5, a_3=1-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{4}{5}, a_4=1-\dfrac{1}{a_3}=-\dfrac{1}{4}=a_1$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列, $\therefore a_{2\,023}=a_1=-\dfrac{1}{4}$.

4. C 【解析】已知数列 $\sqrt{2}, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, \sqrt{11}, \cdots$, 故其通项公式是 $a_n=\sqrt{3n-1}, n\in\mathbf{N}_+$.

令 $\sqrt{3n-1}=\sqrt{38}$, 解得 $n=13$, 所以 $\sqrt{38}$ 是它的第 13 项. 故选 C.

5. $a_n=2^n$ 【解析】因为 $S_n=2^{n+1}-2$, 当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=2^2-2=2$, 当 $n\geqslant 2$ 时, $S_{n-1}=2^n-2$, 所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-2^n+2=2^n$. 当 $n=1$ 时, $a_n=2^n$ 也成立,

所以 $a_n=2^n$.

6. ln 11 【解析】由数列得出规律,该数列各项里面的数字是按正整数的顺序排列,且依次循环出现常数、对数、正弦 3 种形式,由 $11=3\times 3+2$,得该数列的第 11 项为 ln 11.

7. -3 【解析】$\because a_n=n^2+\lambda n$,

$\therefore a_{n+1}=(n+1)^2+\lambda(n+1)$.

$\because a_n\leqslant a_{n+1}$,

$\therefore (n+1)^2+\lambda(n+1)-n^2-\lambda n\geqslant 0$,

化简可得 $2n+1+\lambda\geqslant 0$,

$\therefore \lambda\geqslant -2n-1$, 对任意正整数 n 都成立,

$\therefore \lambda\geqslant -3$, $\therefore \lambda$ 的最小值为 -3.

8. B 【解析】数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\dfrac{n-\sqrt{254}}{n-\sqrt{255}}=1+\dfrac{\sqrt{255}-\sqrt{254}}{n-\sqrt{255}}$, 据此可得 $1>a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{15}$, 且 $a_{16}>a_{17}>a_{18}>a_{19}>\cdots>1$, 所以当 a_n 取得最小值时, n 的值为 15.

9. B 【解析】由已知 $S_n=2a_{n+1}$ 得 $S_n=2(S_{n+1}-S_n)$, 即 $2S_{n+1}=3S_n$. 又由题意知 $S_n\neq 0$, 所以 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{3}{2}$, 所以当 $n\geqslant 2$ 时, 有 $\dfrac{S_n}{S_{n-1}}=\dfrac{3}{2},\cdots,\dfrac{S_3}{S_2}=\dfrac{3}{2},\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{3}{2}$, 累乘得 $S_n=S_1\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$.

故选 B.

10. A 【解析】由 $a_1=3, a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$,

得 $a_2=\dfrac{1+a_1}{1-a_1}=-2$, $a_3=\dfrac{1+a_2}{1-a_2}=-\dfrac{1}{3}$,

$a_4=\dfrac{1+a_3}{1-a_3}=\dfrac{1}{2}$, $a_5=\dfrac{1+a_4}{1-a_4}=3,\cdots$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为周期的周期数列, 且 $a_1a_2a_3a_4=1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 前 2 023 项的积为 $(a_1a_2a_3a_4)^{505}\cdot(a_1a_2a_3)=2$. 故选 A.

11. $(-3,+\infty)$ 【解析】由 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, 得 $S_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$,

所以 $b_n=\dfrac{\lambda}{1-S_n}+n^2=\dfrac{\lambda}{1-\dfrac{n}{n+1}}+n^2=n^2+\lambda n+\lambda$,

因为数列 $\{b_n\}$ 是严格递增数列,

所以 $b_{n+1}-b_n=(n+1)^2+\lambda(n+1)+\lambda-n^2-\lambda n-\lambda=2n+1+\lambda>0$, 在 $n\geqslant 1$ 时恒

成立，可得 $\lambda>-2n-1$ 在 $n\geqslant1$ 时恒成立，则 $\lambda>-3$，即 λ 的取值范围为 $(-3,+\infty)$.

12.【解】(1) 由 $\frac{1}{T_n}=\frac{S_n-1}{S_n}$ 得，$T_n\neq0$，$S_n\neq0$ 且 $S_n\neq1$，当 $n=1$ 时，$\frac{1}{T_1}=\frac{S_1-1}{S_1}=\frac{1}{S_1}$，得 $S_1=2$；当 $n=2$ 时，$\frac{1}{T_2}=\frac{S_2-1}{S_2}=\frac{1}{S_1S_2}$，得 $S_2=\frac{3}{2}$.

(2) 对于 $\frac{1}{T_n}=\frac{S_n-1}{S_n}$①，当 $n\geqslant2$ 时，

$\frac{1}{T_{n-1}}=\frac{S_{n-1}-1}{S_{n-1}}$②，

①÷②得，$\frac{T_{n-1}}{T_n}=\frac{S_n-1}{S_n}\cdot\frac{S_{n-1}}{S_{n-1}-1}=\frac{1}{S_n}$，

即 $S_n-1=\frac{S_{n-1}-1}{S_{n-1}}$，$\therefore\frac{1}{S_n-1}=\frac{S_{n-1}}{S_{n-1}-1}=\frac{1}{S_{n-1}-1}+1$，

$\therefore\frac{1}{S_n-1}-\frac{1}{S_{n-1}-1}=1$，

$\therefore\frac{1}{S_2-1}-\frac{1}{S_1-1}=1$，

$\frac{1}{S_3-1}-\frac{1}{S_2-1}=1$，

$\frac{1}{S_4-1}-\frac{1}{S_3-1}=1$，

……

$\frac{1}{S_n-1}-\frac{1}{S_{n-1}-1}=1$，

又 $\frac{1}{S_1-1}=1$，左右两边分别累加后得

$\frac{1}{S_n-1}-1=n-1$，$\frac{1}{S_n-1}=1+n-1=n$，

$\therefore S_n=\frac{1}{n}+1(n\geqslant2)$，当 $n=1$ 时，$S_1=2$ 也符合上式，$\therefore S_n=\frac{1}{n}+1$. 当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{n}+1-\left(\frac{1}{n-1}+1\right)=-\frac{1}{n(n-1)}$，又当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$，

不符合 $a_n=-\frac{1}{n(n-1)}$，

$$\therefore a_n=\begin{cases}2, & n=1,\\ -\frac{1}{n(n-1)}, & n\geqslant2.\end{cases}$$

13. ABC 【解析】A:易知函数 $y=x+\frac{3}{2x}$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,

由 $a_n=n+\frac{3}{2n}, n\in\mathbf{N}_+, 1<\frac{\sqrt{6}}{2}<2$,

且 $a_1=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}<a_2=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$,易知$\{a_n\}$为递增数列,符合题意.

B:函数 $y=2x^2-5x+4=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$ 在 $\left(0,\frac{5}{4}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$ 上单调递增,

由 $a_n=2n^2-5n+4, n\in\mathbf{N}_+, 1<\frac{5}{4}<2$,

且 $a_1=1<a_2=2$,易知$\{a_n\}$为递增数列,符合题意.

C:由 $a_{n+1}-a_n=n>0$,知$\{a_n\}$为递增数列,符合题意.

D:对于 $a_{n+1}=2a_n$,当 $a_1<0$ 时,$\{a_n\}$为递减数列,不符合题意.

故选 ABC.

14. AB 【解析】由题可知,对任意的 $n\in\mathbf{N}_+, a_na_{n+1}=c$($c$ 为非零常数),则对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$, $a_n\neq 0$,所以 $a_na_{n+1}=c=a_{n+1}a_{n+2}$,故 $a_{n+2}=a_n$,A 正确;

因为 $a_1a_2=3a_2=c$,所以 $a_2=\frac{c}{3}$,则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=4a_1+3a_2=12+c=14$,解得 $c=2$,C 错误;

$a_2=\frac{c}{3}=\frac{2}{3}$,B 正确;

$a_na_{n+1}a_{n+2}=2a_n=\begin{cases}6, n\text{ 为奇数},\\ \frac{4}{3}, n\text{ 为偶数},\end{cases}$ D 错误.

5.2 等差数列

5.2.1 等差数列

易错记

1-1. D 【解析】由已知条件可知该等差

数列的通项公式为$a_n=-24+(n-1)d$,

故$\begin{cases}a_{10}=-24+9d>0,\\a_9=-24+8d\leqslant 0,\end{cases}$解得$\frac{8}{3}<d\leqslant 3$,故选 D.

题型诀

1-1. D 【解析】当数列$\{a_n\}$为等差数列时,不一定有$a_6-a_5=\frac{3}{2}$成立;

$a_6-a_5=\frac{3}{2}$成立也不一定能推出数列$\{a_n\}$为等差数列.

故“$a_6-a_5=\frac{3}{2}$”是“数列$\{a_n\}$为等差数列”的既不充分也不必要条件.

故选 D.

1-2. BCD 【解析】数列$-1,1,3$是等差数列,取绝对值后$1,1,3$不是等差数列(提示:举特例进行否定即可),故选项 A 不符合题意;

若$\{a_n\}$为等差数列,根据等差数列的定义,可知数列$\{a_{n+1}-a_n\}$为常数列,故$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列,故选项 B 符合题意;

若$\{a_n\}$为等差数列,设其公差为d,则$pa_{n+1}+q-pa_n-q=p(a_{n+1}-a_n)=pd$为常数,故$\{pa_n+q\}$为等差数列,故选项 C 符合题意;

若$\{a_n\}$为等差数列,设其公差为d,则$2a_{n+1}+n+1-2a_n-n=2d+1$为常数,故$\{2a_n+n\}$为等差数列,故选项 D 符合题意. 故选 BCD.

2-1. 【解】因为$a_n=pn^2-qn$,

所以$a_{n+1}-a_n=p(n+1)^2-q(n+1)-(pn^2-qn)=2pn+p-q(*)$.

若数列$\{a_n\}$是等差数列,则$(*)$式是一个与n无关的常数,所以$2p=0$,即当$p=0$,q为常数时,数列$\{a_n\}$是等差数列.

2-2. 【解】(1)$\{b_n\}$是等差数列,理由如下:

因为$a_1=1$,$a_n=2a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$,所以$a_n>0$.

$b_1=\log_2(a_1+1)=\log_2 2=1$,

当$n\geqslant 2$时,$b_n-b_{n-1}=\log_2(a_n+1)-$

$\log_2(a_{n-1}+1)=\log_2\dfrac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=\log_2\dfrac{2a_{n-1}+1+1}{a_{n-1}+1}=\log_2\dfrac{2a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1}=\log_2 2=1$,

所以$\{b_n\}$是以 1 为首项,1 为公差的等差数列.

(2)由(1)得 $b_n=1+(n-1)\times1=n$,

所以 $a_n+1=2^{b_n}=2^n$,所以 $a_n=2^n-1$.

3-1. B 【解析】因为 $a_1=\dfrac{7}{4}$, $2a_{n+1}-2a_n=-1$,所以 $a_{n+1}-a_n=-\dfrac{1}{2}$,所以数列$\{a_n\}$是首项为$\dfrac{7}{4}$,公差为$-\dfrac{1}{2}$的等差数列,即 $a_n=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}(n-1)=-\dfrac{1}{2}n+\dfrac{9}{4}$. 令 $a_n>0$,可得$-\dfrac{1}{2}n+\dfrac{9}{4}>0$,解得 $n<\dfrac{9}{2}$.

又因为 $n\in\mathbf{N}_+$,

所以 $0<n\leqslant4$,所以 n 的最大值为 4.

3-2. A 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $a_6-3a_2=6$, $a_3=0$,

得$\begin{cases}a_1+5d-3(a_1+d)=6,\\a_1+2d=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=-2,\\d=1,\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-2+(n-1)\times1=n-3$,

所以 $a_{2\,025}=2\,025-3=2\,022$. 故选 A.

3-3. B 【解析】令 $n=1$,得$\dfrac{2}{a_1+1}=1$,令 $n=3$,得$\dfrac{2}{a_3+1}=3$,

所以数列$\left\{\dfrac{2}{a_n+1}\right\}$的公差 $d=1$.

所以$\dfrac{2}{a_5+1}=\dfrac{2}{a_3+1}+2=3+2=5$,

解得 $a_5=-\dfrac{3}{5}$.

故选 B.

3-4. $2n-3$ 【解析】方法一:设$\{a_n\}$的公差为 d,

由题知 $a_1+d=1$, $2a_1+4d=6$,

解得 $a_1=-1$, $d=2$,

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-1+2(n-1)=2n-3$.

方法二:因为 $a_1+a_5=6$,所以 $2a_3=6$,即 $a_3=3$. 因为 $a_2=1$,所以公差 $d=a_3-a_2=2$,故 $a_n=a_2+(n-2)d=1+2(n-2)=$

$2n-3$.

4-1. B 【解析】$\because \{a_n\}$是等差数列,

$\therefore a_1+a_8+a_{15}=3a_8=\pi$, $\therefore a_8=\dfrac{\pi}{3}$,

$\therefore \tan(a_4+a_{12})=\tan(2a_8)=\tan\dfrac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$. 故选 B.

4-2. 12 【解析】由题意得 $a_5+a_{11}=2a_8=2\times8$,则 $a_8=8$.

又 $a_2=2$,$\therefore$ 公差 $d=\dfrac{a_8-a_2}{8-2}=\dfrac{8-2}{6}=1$,

$\therefore a_{12}=a_8+4d=8+4\times1=12$.

5-1. A 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $a_2=3$,$a_6=11$,

所以 $a_6-a_2=4d=8$,所以 $d=2$,则 $a_n=a_2+(n-2)d=2n-1$,

所以 $M(m,2m-1)$,$N(n,2n-1)$,则直线 l 的斜率为$\dfrac{2n-2m}{n-m}=2$. 故选 A.

5-2. -4 【解析】当 $1<n\leqslant6$ 时,$a_n-a_{n-1}=-4$,

所以$\{a_n\}$是首项为 18,公差为-4 的等差数列,

所以 $a_n=18-4(n-1)=22-4n$,且 $n=1,2,\cdots,6$,

所以通过数列$\{a_n\}$图象上所有点的直线的斜率为-4.

6-1. C 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

则 $a_2+a_3=a_1+d+a_1+2d=2a_1+3d=4+3d=16$,解得 $d=4$.

则 $a_4+a_5+a_6=3a_5=3(a_1+4d)=3\times(2+16)=54$.

6-2. B 【解析】由题可知,a_2,$a_{2\,020}$ 为方程 $x^2-10x+16=0$ 的两根,$\therefore a_2+a_{2\,020}=10$.

由等差数列的性质得 $2a_{1\,011}=10$,即 $a_{1\,011}=5$,

$\therefore a_1+a_{1\,011}+a_{2\,021}=3a_{1\,011}=15$. 故选 B.

7-1. D 【解析】设从前到后的 5 人所得钱数分别为 $a-2d$,$a-d$,a,$a+d$,$a+2d$,

则由题意可得 $a-2d+a-d=a+a+d+a+2d$,即 $a=-6d$.

又 $a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=5a=5$,解

得 $a=1$，则中间 3 人所得钱数之和为 $a-d+a+a+d=3a=3$，

第 1 人与第 5 人所得钱数之和为 $a-2d+a+2d=2a=2$，

所以中间 3 人所得钱数之和比第 1 人与第 5 人所得钱数之和多 $3-2=1$ 钱，故选 D.

7-2.【解】(1) 由题意设这三个数依次为 $a-d, a, a+d$，

则 $\begin{cases} a-d+a+a+d=9, \\ a(a-d)=6(a+d), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ d=-1, \end{cases}$

所以这三个数依次为 4,3,2.

(2) 由题意设这四个数依次为 $a-3m, a-m, a+m, a+3m$（公差为 $2m>0$），

则 $\begin{cases} a-m+a+m=2, \\ (a-3m)(a+3m)=-8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ m=1 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} a=1, \\ m=-1 \end{cases}$（舍去），

故所求的四个数依次为 $-2,0,2,4$.

8-1. B 【解析】∵ 等差数列 $2,6,10,\cdots,190$ 的公差 $d_1=4$，∴ 通项公式为 $a_n=4n-2$. ∵ 等差数列 $2,8,14,\cdots,200$ 的公差 $d_2=6$，∴ 通项公式为 $b_n=6n-4$，由这两个等差数列的相同项按从小到大的顺序组成一个新数列，则此新数列仍为等差数列，则这个新数列 $\{c_n\}$ 的首项 $c_1=2$，公差 $d=12$.

∴ $c_n=2+12(n-1)=12n-10$.

令 $12n-10\leqslant 190$ 且 $n\in \mathbf{N}_+$，解得 $n\leqslant 16$.

∴ 这个新数列的项数为 16. 故选 B.

8-2. $c_n=15n-7$ 【解析】等差数列 $5,8,11,\cdots$ 的公差 $d_1=8-5=3$，∴ 通项公式 $a_n=5+3(n-1)=3n+2$，

同理等差数列 $3,8,13,\cdots$ 的公差 $d_2=8-3=5$，

∴ 通项公式 $b_m=3+5(m-1)=5m-2$，

令 $3n+2=5m-2$，

解得 $n=\dfrac{5m-4}{3}=m+\dfrac{2(m-2)}{3}$，

可知当 $m=2,5,8,\cdots$ 时，n 为正整数，

由等差数列的性质可知，$b_2, b_5, b_8, \cdots$ 仍是等差数列，

且 $b_2=8, b_5=23$，∴ 公差 $d'=23-8=15$，

∴ 新数列的通项公式为 $c_n=8+15(n-$

$1)=15n-7$.

8-3.【解】(1)因为 $a_1=3,d=-5$,

所以 $a_n=3+(n-1)\times(-5)=8-5n$.

因为数列$\{a_n\}$中序号能被 4 除余 3 的项依次是第 3 项,第 7 项,第 11 项,…,所以$\{b_k\}$的首项 $b_1=a_3=-7,b_2=a_7=-27$.

(2)设$\{a_n\}$中的第 m 项是$\{b_k\}$的第 k 项,即 $b_k=a_m$,

则 $m=3+4(k-1)=4k-1(k\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $b_k=a_m=a_{4k-1}=8-5(4k-1)=13-20k$ $(k\in\mathbf{N}_+)$.

所以$\{b_k\}$是等差数列,其通项公式为 $b_k=13-20k(k\in\mathbf{N}_+)$.

(3)因为 $b_{110}=13-20\times110=-2\ 187$,

设它是$\{a_n\}$中的第 m 项,则 $-2\ 187=8-5m$,则 $m=439$,

所以 b_{110} 是$\{a_n\}$中的第 439 项.

9-1. C 【解析】由 $a_{n+1}=a_n+2\cdot\sqrt{a_n+1}+1$,可得 $a_{n+1}+1=(\sqrt{a_n+1}+1)^2$,

故 $\sqrt{a_{n+1}+1}-\sqrt{a_n+1}=1$,

所以$\{\sqrt{a_n+1}\}$是以 1 为首项,1 为公差的等差数列,

所以 $\sqrt{a_n+1}=n$,即 $a_n=n^2-1$,故 $a_{20}=20^2-1=399$,故选 C.

9-2. B 【解析】$\because 2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}+2(n\geqslant2)$,$\therefore(a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})=-2$,

$\therefore$ 数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是公差为 -2 的等差数列.

$\because a_1=1,a_2=30$,$\therefore a_2-a_1=29$,

$\therefore a_{16}-a_{15}=29+(15-1)\times(-2)=1>0$,

$a_{17}-a_{16}=29+(16-1)\times(-2)=-1<0$.

又$\because$ 数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是递减数列,

$\therefore$ 数列$\{a_{n+1}-a_n\}$的前 15 项和最大,

即$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{16}-a_{15})=a_{16}-1$,

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$的最大项是第 16 项 a_{16}.

故选 B.

9-3.【解】由 $4S_n=a_n^2+2a_n+m$,可得 $4S_{n+1}=a_{n+1}^2+2a_{n+1}+m$,

两式相减可得 $a_{n+1}^2-a_n^2+2a_{n+1}-2a_n=4S_{n+1}-4S_n=4a_{n+1}$,

所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=2(a_{n+1}+a_n)$,

可得$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=0$,

因为$\{a_n\}$为正项数列，所以$a_{n+1}+a_n>0$，$a_{n+1}-a_n-2=0$，

则$a_{n+1}-a_n=2$，故数列$\{a_n\}$为等差数列，且公差为2，

故$a_n=a_2+2(n-2)=2n-1$.

9-4.【解】方法一：由$S_{n+1}=2S_n+2^{n+1}$，得$\frac{S_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{S_n}{2^n}+1$，又$\frac{S_1}{2}=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 数列$\left\{\frac{S_n}{2^n}\right\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，1为公差的等差数列，$\therefore \frac{S_n}{2^n}=\frac{1}{2}+n-1=\frac{2n-1}{2}$，

即$S_n=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)\cdot 2^{n-1}-(2n-3)\cdot 2^{n-2}=(2n+1)\cdot 2^{n-2}$，

又$a_1=1$不满足上式，

$\therefore a_n=\begin{cases}1, n=1,\\(2n+1)\cdot 2^{n-2}, n\geqslant 2.\end{cases}$

方法二：由$S_{n+1}=2S_n+2^{n+1}$，可得$S_{n+1}-S_n=S_n+2^{n+1}$，即$a_{n+1}=S_n+2^{n+1}$①.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_{n-1}+2^n$②，①−②，得$a_{n+1}-a_n=a_n+2^n$，即$a_{n+1}=2a_n+2^n$，故$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$，则数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$为等差数列，且公差为$\frac{1}{2}$. 由$a_1=1$，$S_{n+1}=2S_n+2^{n+1}$，得$a_2=5$，即$\frac{a_2}{2^2}=\frac{5}{4}$，故$\frac{a_n}{2^n}=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}(n-2)=\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}$ $(n\geqslant 2)$，所以$a_n=(2n+1)\cdot 2^{n-2}(n\geqslant 2)$，又$a_1=1$不满足上式，

$\therefore a_n=\begin{cases}1, n=1,\\(2n+1)\cdot 2^{n-2}, n\geqslant 2.\end{cases}$

10-1. D 【解析】设十二个节气其日影长依次成等差数列$\{a_n\}$，公差为d.

由题意知$a_4=9.5$，$a_7=6$，则$d=\frac{a_7-a_4}{3}=-\frac{7}{6}$，

则小满当日日影长$a_{11}=a_7+4d=6+4\times\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{4}{3}$(尺).

10-2.【解】设从第1年起，第n年的利润为a_n，则$a_1=200$，$a_n-a_{n-1}=-20(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}_+)$，

所以每年的利润a_n构成一个等差数列

$\{a_n\}$,其公差 $d=-20$,所以 $a_n=a_1+(n-1)d=200+(n-1)(-20)=220-20n$.

若 $a_n<0$,则该公司这一年将出现亏损.

由 $a_n=220-20n<0$,得 $n>11$.

故从第 12 年起,该公司经销这一产品将出现亏损.

巩固练

1. C 【解析】因为 $(a_{n+1}+a_{n+3})-(a_n+a_{n+2})=(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+3}-a_{n+2})=d+d=2d$,所以数列 $a_1+a_3,a_2+a_4,a_3+a_5,\cdots$ 是公差为 $2d$ 的等差数列. 故选 C.

2. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则 $a_2+a_8=2a_5=10$,得 $a_5=5$,

所以 $a_3a_7=(a_5-2d)(a_5+2d)=a_5^2-4d^2=25-4d^2=-11$,即 $d^2=9$,

又 $d>0$,所以 $d=3$. 故选 D.

3. C 【解析】由等差数列的性质,得 $a_6+a_8+a_{10}=3a_8=72$,

解得 $a_8=24$,

而 $2a_{10}-a_{12}=2(a_1+9d)-(a_1+11d)=a_1+7d=a_8=24$. 故选 C.

4. B 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,

则 $\begin{cases}3a_1+3d=12,\\3a_1+12d=39,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=3,\end{cases}$

所以 $a_8=a_1+7d=22$.

故选 B.

5. A 【解析】(提示:根据数列特点赋值证明是等差数列,从而求出通项公式,代入求解一元二次方程即可得解)令 $m=1$,因为 $a_{m+n}=a_m+a_n(m,n\in\mathbf{N}_+)$,所以 $a_{n+1}=a_1+a_n=2+a_n$,所以 $a_{n+1}-a_n=2$,即数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项,2 为公差的等差数列,所以 $a_n=2+(n-1)\times2=2n$. 则有 $a_k=2k$,$a_{k+1}=2(k+1)=2k+2$,

所以 $a_ka_{k+1}=2k(2k+2)=4k^2+4k=1\ 680$,解得 $k=20$ 或 $k=-21$(不合题意,舍去).

6. $a_n=3n$ 【解析】在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_{11}=a_5+a_6=a_1+a_{10}$,则公差 $d=a_1$,

由 $a_5-a_3=6$,得 $2d=6$,因此 $a_1=d=3$,

$a_n=a_1+(n-1)d=3n$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n$.

7. $a_n=2n-1$ 【解析】因为 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}(n\geqslant 2)$，

所以 $S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，即 $(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，

由题意得 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=a_n>0(n\geqslant 2)$，

则 $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$，而 $\sqrt{S_1}=1$，

故 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，

从而 $\sqrt{S_n}=1+n-1=n$，即 $S_n=n^2$，因此 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geqslant 2)$，

而 $a_1=1$ 满足上式，故 $a_n=2n-1$.

8. (1)【证明】因为 $a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$，$b_n=\frac{1}{a_n-1}$，

所以 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{\left(2-\frac{1}{a_n}\right)-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_n}{a_n-1}-\frac{1}{a_n-1}=1.$

又 $b_1=\frac{1}{a_1-1}=-\frac{5}{2}$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $-\frac{5}{2}$ 为首项，1 为公差的等差数列.

(2)【解】由(1)知 $b_n=n-\frac{7}{2}$，则 $a_n=1+\frac{1}{b_n}=1+\frac{2}{2n-7}(n\in\mathbf{N}_+)$.

设 $f(x)=1+\frac{2}{2x-7}$，则 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{7}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

且当 $x\in\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)$ 时，$f(x)<1$；当 $x\in\left(\frac{7}{2},+\infty\right)$ 时，$f(x)>1$.

所以当 $n=3$ 时，$\{a_n\}$ 有最小项 $a_3=-1$；当 $n=4$ 时，$\{a_n\}$ 有最大项 $a_4=3$.

9. (1)【证明】由 $3a_na_{n-1}+a_n-a_{n-1}=0(n\geqslant 2)$ 及 $a_1=1$，得 $a_n\neq 0$，所以 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=3$ $(n\geqslant 2)$. 又 $\frac{1}{a_1}=1$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项,3 为公差的等差数列.

(2)【解】由(1)可得$\frac{1}{a_n}=1+3(n-1)=3n-2$,

所以 $a_n=\frac{1}{3n-2}$.

(3)【解】$\lambda a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\geqslant\lambda$ 对任意 $n\geqslant2$ 的整数恒成立,

即$\frac{\lambda}{3n-2}+3n+1\geqslant\lambda$ 对任意 $n\geqslant2(n\in\mathbf{N}_+)$恒成立,

整理得 $\lambda\leqslant\frac{(3n+1)(3n-2)}{3(n-1)}$对任意 $n\geqslant2(n\in\mathbf{N}_+)$恒成立.

令 $b_n=\frac{(3n+1)(3n-2)}{3(n-1)}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$,

则 $b_{n+1}-b_n=\frac{(3n+4)(3n+1)}{3n}-\frac{(3n+1)(3n-2)}{3(n-1)}=\frac{(3n+1)(3n-4)}{3n(n-1)}$.

因为 $n\geqslant2$,所以 $b_{n+1}-b_n>0$,

所以当 $n\geqslant2$ 时,$\{b_n\}$为递增数列,故 b_2 最小,且 $b_2=\frac{28}{3}$.

故实数 λ 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{28}{3}\right]$.

10. BC 【解析】对于 A,给出数列的有限项不一定可以唯一确定通项公式,故 A 不正确;

对于 B,由等差数列性质知公差 $d>0$,$\{a_n\}$必是递增数列,故 B 正确;

对于 C,$a=b=c=1$ 时,$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1$ 是等差数列,而 $a=1,b=2,c=3$ 时不成立,故 C 正确;

对于 D,数列$\{a_n\}$是等差数列,公差为 d,所以 $a_n+2a_{n+1}=a_1+(n-1)d+2a_1+2nd=3a_1+(3n-1)d$ 也是等差数列,故 D 不正确. 故选 BC.

11. ABC 【解析】对于 A(提示:选项 A 可利用等差数列的性质及合比性质判断),由等差数列的性质,可知 $a_p+a_q=a_s+a_t$,设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $\frac{a_t-a_q}{t-q}=d=\frac{a_t-a_s}{t-s}$,则

$\dfrac{a_t-a_q+a_t-a_s}{t-q+t-s}=d=\dfrac{a_t-a_p}{t-p}$，即 $\dfrac{a_t-a_p}{t-p}=\dfrac{2a_t-a_q-a_s}{2t-q-s}$，故 A 正确；

对于 B（提示：选项 B 可利用两点间距离公式判断），由 $|AB|=\sqrt{(p-s)^2+(a_p-a_s)^2}=\sqrt{(p-s)^2(1+d^2)}$，$|CD|=\sqrt{(t-q)^2+(a_t-a_q)^2}=\sqrt{(t-q)^2(1+d^2)}$，又 $t-q=p-s$，故 $|AB|=|CD|$，故 B 正确；

对于 C（提示：选项 C 和 D 可利用直线的斜率公式判断），由 $k_{AB}=\dfrac{a_p-a_s}{p-s}=d$，$k_{CD}=\dfrac{a_t-a_q}{t-q}=d$，可知直线 AB 与直线 CD 的斜率相等，故 C 正确；

对于 D，同理，由 $k_{AC}=\dfrac{a_q-a_s}{q-s}=d$，$k_{BD}=\dfrac{a_t-a_p}{t-p}=d$，可知直线 AC 与直线 BD 的斜率也相等，故 D 错误. 故选 ABC.

12. (1) 220　(2) $2mn+m+n$　【解析】

(1) 第一列的数字为 4, 7, 10, 13, 16, …，为等差数列，且公差 $d=3$，设等差数列为 $\{a_n\}$，首项为 a_1，则 $a_n=a_1+3(n-1)=4+3(n-1)=3n+1$，故第 10 行的第一个数为 $a_{10}=31$.

再看行，第一行的数字是加 3 递增，第二行是加 5 递增，第三行是加 7 递增，…，第 N 行是加 $3+2(N-1)$ 递增，则第 10 行是加 $3+(10-1)\times2=21$ 递增，所以第 10 行的第 10 个数是 $31+21\times(10-1)=220$.

(2) 观察“正方形筛子”可知，每一行及每一列都是等差数列，

第 n 行和第 n 列的等差数列的公差相等，都是 $2n+1$.

因为第 n 行的第一个数是 $4+(n-1)\cdot3=3n+1$，所以第 n 行第 m 个数是 $3n+1+(2n+1)\cdot(m-1)=2mn+m+n$，故 $a_{(n,m)}=2mn+m+n$.

5.2.2　等差数列的前 n 项和

易错记

1-1. 12 或 13 【解析】方法一：$\because a_1>0$，$S_{25}=0$，即$\dfrac{25(a_1+a_{25})}{2}=25a_{13}=0$，$\therefore$ 当 S_n 取得最大值时 $n=12$ 或 13.

方法二：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

则 $S_{25}=25a_1+\dfrac{25\times24}{2}d=0$，则 $a_1=-12d$，

$\therefore S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2-\dfrac{25d}{2}n.$

$\because a_1>0$，$\therefore d<0.$

考虑函数 $y=\dfrac{d}{2}x^2-\dfrac{25d}{2}x$ 的图象是开口向下的抛物线，对称轴为直线 $x=\dfrac{25}{2}$.

$\because n$ 为正整数，$\therefore$ 当 $n=12$ 或 13 时，S_n 取得最大值.

1-2. 【解】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，因为 $a_3=-16$，$S_9=-72$，

所以 $a_1+2d=-16$，$9a_1+36d=-72$，

所以 $a_1=-24$，$d=4$，

所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=4n-28$.

(2) $a_n=4n-28$，$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=2n^2-26n=2\left(n-\dfrac{13}{2}\right)^2-\dfrac{169}{2}$，$n\in\mathbf{N}_+$，

当 $n=6$ 或 $n=7$ 时，S_n 取最小值，最小值为-84，

所以 S_n 有最小值-84，S_n 取最小值时，$n=6$ 或 $n=7$.

题型诀

1-1. B 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

则$\begin{cases}S_3=3a_1+\dfrac{3\times2d}{2}=1,\\ S_6=6a_1+\dfrac{6\times5d}{2}=3,\end{cases}$ 即$\begin{cases}3a_1+3d=1,\\ 2a_1+5d=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=\dfrac{2}{9},\\ d=\dfrac{1}{9},\end{cases}$

则 $a_5=a_1+4d=\dfrac{2}{9}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{2}{3}$，故选 B.

【快解】$S_6-S_3=3a_5=2$，$a_5=\dfrac{2}{3}$.

1-2. A 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差

为 d. 由 $S_{19}=38$,

得 $S_{19}=\frac{(a_1+a_{19})\times 19}{2}=38$, 即 $a_1+a_{19}=4$.

又 $a_1+a_{19}=2a_{10}$,

$\therefore a_{10}=2$, 则 $2a_{11}-a_{12}=a_{11}-a_{12}+a_{11}=a_{11}-d=a_{10}=2$, 故选 A.

1-3. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 由 $a_1+a_2=3$, 可得 $2a_1+d=3$,

因为等差数列 $\{a_n\}$ 中各项均为正整数,

所以 a_1 为正整数, d 为非负整数,

所以可得 $a_1=1$, $d=1$, 所以 $a_n=n$. 由 $S_n=\frac{n(1+n)}{2}=28$, 解得 $n=7$(负值舍去).

1-4. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由 $a_{10}+a_{11}+a_{12}=a_1+a_2+a_3+27d$, 得 $7=1+27d$, 解得 $d=\frac{2}{9}$.

由 $a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=1$, 得 $3a_1+\frac{2}{3}=1$,

解得 $a_1=\frac{1}{9}$,

所以 $S_{102}=102a_1+\frac{102\times 101}{2}\times d=102\times\frac{1}{9}+\frac{102\times 101}{2}\times\frac{2}{9}=1\ 156$.

故选 C.

1-5. A 【解析】由题意, $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5(a_1+5)}{2}=5$, 解得 $a_1=-3$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 则 $a_5-a_1=4d=8$, 解得 $d=2$,

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-3+(n-1)\times 2=2n-5$.

故选 A.

1-6. AC 【解析】根据题意, 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 设其公差为 d, 若 $a_1+5a_3=S_7$, 即 $a_1+5a_1+10d=7a_1+21d$,

则 $a_1=-11d$, 所以 $a_{12}=a_1+11d=0$,

所以选项 A 正确.

$a_n=a_1+(n-1)d=-11d+(n-1)d=(n-12)d$,

若 $d=0$, 则 $a_1=0$, 则数列 $\{a_n\}$ 是常数列;

若 $d>0$, 则 $a_1<0$, 由于 $a_{12}=0$, 则 S_{11} 或 S_{12} 最小;

若 $d<0$, 则 $a_1>0$, 则 S_n 没有最小值, 所以

选项 B 错误.

$S_{15}-S_8=a_9+a_{10}+\cdots+a_{14}+a_{15}=7a_{12}=0$,所以 $S_{15}=S_8$,所以选项 C 正确.

$S_{23}=\frac{23}{2}(a_1+a_{23})=23a_{12}=0$,所以选项 D 错误.

1-7.【解】(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,

则$\begin{cases}a_3=a_1+2d=21,\\a_7=a_1+6d=13,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=25,\\d=-2,\end{cases}$

所以 $a_n=25+(n-1)\times(-2)=27-2n$.

(2)由(1)知 $a_{3n-2}=27-2(3n-2)=31-6n$,$a_1=25$,

所以 $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}=\frac{n[25+(31-6n)]}{2}=28n-3n^2$.

2-1. A【解析】因为数列$\{a_n\}$为等差数列,所以 S_5,$S_{10}-S_5$,$S_{15}-S_{10}$ 成等差数列.因为 $S_{10}:S_5=3:1$,所以设 $S_5=m$,则 $S_{10}=3m$,则 $S_{10}-S_5=2m$,可得 $S_{15}-S_{10}=3m$,所以 $S_{15}=6m$,所以$S_{15}:S_5=6:1$.故选 A.

2-2.【解】方法一:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

根据题意,可得

$$\begin{cases}10a_1+\frac{10\times9}{2}d=100, & ①\\100a_1+\frac{100\times99}{2}d=10. & ②\end{cases}$$

①×10-②,整理得 $d=-\frac{11}{50}$,代入①,得 $a_1=\frac{1\ 099}{100}$,

故前 110 项和 $S_{110}=110a_1+\frac{110\times109}{2}d=110\times\frac{1\ 099}{100}+\frac{110\times109}{2}\times\left(-\frac{11}{50}\right)=110\times\frac{1\ 099-109\times11}{100}=110\times\frac{1\ 099-1\ 199}{100}=-110$.

方法二:设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=An^2+Bn$.由题设条件可知

$\begin{cases}100A+10B=100,\\10\ 000A+100B=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=-\frac{11}{100},\\B=\frac{111}{10}.\end{cases}$

故 $S_{110}=-\frac{11}{100}\times110^2+\frac{111}{10}\times110=-110$.

方法三：$\because S_{100}-S_{10}=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{100}=\frac{90(a_{11}+a_{100})}{2}=\frac{90(a_1+a_{110})}{2}$，又 $\because S_{100}-S_{10}=10-100=-90$，$\therefore a_1+a_{110}=-2$，

$\therefore S_{110}=\frac{110(a_1+a_{110})}{2}=\frac{110\times(-2)}{2}=-110$.

方法四：$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列，且 $\left(10,\frac{S_{10}}{10}\right)$，$\left(100,\frac{S_{100}}{100}\right)$，$\left(110,\frac{S_{110}}{110}\right)$ 三点共线，

于是有 $\frac{\frac{S_{110}}{110}-\frac{S_{100}}{100}}{110-100}=\frac{\frac{S_{100}}{100}-\frac{S_{10}}{10}}{100-10}$，将 $S_{10}=100$，$S_{100}=10$ 代入，

得 $S_{110}=-110$.

方法五：数列 S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$，…，$S_{100}-S_{90}$，$S_{110}-S_{100}$ 成等差数列，设其公差为 d'，前 10 项和为 $10S_{10}+\frac{10\times 9}{2}d'=S_{100}=10$，

解得 $d'=-22$，

$\therefore S_{110}-S_{100}=S_{10}+(11-1)d'=100+10\times(-22)=-120$，

$\therefore S_{110}=-120+S_{100}=-110$.

3-1. **B** 【解析】奇数项共有 $(n+1)$ 项，其和为 $\frac{a_1+a_{2n+1}}{2}\cdot(n+1)=(n+1)a_{n+1}=290$. 偶数项共有 n 项，其和为 $\frac{a_2+a_{2n}}{2}\cdot n=na_{n+1}=261$，所以 $a_{n+1}=290-261=29$. 故选 B.

3-2. 【解】(1) 由题知，等差数列 $\{a_n\}$ 共有 1 006 个奇数项，1 005 个偶数项，

$\therefore S_{奇}=\frac{1\ 006(a_1+a_{2\ 011})}{2}$，

$S_{偶}=\frac{1\ 005(a_2+a_{2\ 010})}{2}$.

$\because a_1+a_{2\ 011}=a_2+a_{2\ 010}$，

$\therefore \frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{1\ 006}{1\ 005}$.

(2) 在等差数列的前 20 项中，

奇数项和 $S_{奇}=\frac{1}{3}\times 75=25$，

偶数项和 $S_{偶}=\frac{2}{3}\times75=50.$

又 $S_{偶}-S_{奇}=10d$,

$\therefore d=\frac{50-25}{10}=\frac{5}{2}.$

4-1. D 【解析】由 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n-1}{3n+2}$,可设 $S_n=kn(2n-1)(k\neq0)$,$T_n=kn(3n+2)$,

则当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=kn(2n-1)-k(n-1)(2n-3)=k(4n-3)$,$b_n=T_n-T_{n-1}=kn(3n+2)-k(n-1)(3n-1)=k(6n-1)$,所以 $\frac{a_6}{b_3}=\frac{4\times6-3}{6\times3-1}=\frac{21}{17}$. 故选 D.

4-2. $\frac{22}{39}$ 【解析】$\frac{a_1+a_6+a_{14}+a_{19}}{b_5+b_8+b_{12}+b_{15}}=\frac{4a_{10}}{4b_{10}}=\frac{19a_{10}}{19b_{10}}=\frac{S_{19}}{T_{19}}=\frac{22}{39}.$

4-3. $\frac{8}{3}$ 2 【解析】由等差数列的性质可得 $\frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\frac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\frac{21(a_1+a_{21})}{21(b_1+b_{21})}=\frac{2S_{21}}{2T_{21}}=\frac{3\times21+1}{21+3}=\frac{8}{3}.$

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2a_n}{2b_n}=\frac{a_1+a_{2n-1}}{b_1+b_{2n-1}}=\frac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{(2n-1)(b_1+b_{2n-1})}=\frac{2S_{2n-1}}{2T_{2n-1}}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{3(2n-1)+1}{(2n-1)+3}=\frac{6n-2}{2n+2}=\frac{3n-1}{n+1}=\frac{3(n+1)-4}{n+1}=3-\frac{4}{n+1}$,

若 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数,则 4 能被 $(n+1)$ 整除,

又 $n+1\geqslant2$,故 $n+1=2$ 或 $n+1=4$,

解得 $n=1$ 或 3,

所以使得 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数的 n 值个数为 2.

5-1. A 【解析】令 $a_n=2n-9>0(n\in\mathbf{N}_+)$,得 $n\geqslant5$,则在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$d>0$,$a_4<0$,$a_5>0$,

故当 $n=4$ 时,数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和取得最小值.

故选 A.

5-2. ACD 【解析】$\because S_5=S_9$,$\therefore 5a_1+\frac{5\times4}{2}d=9a_1+\frac{9\times8}{2}d$,$\therefore a_1=-\frac{13}{2}d>0$,$\therefore d<0$,$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=-\frac{13}{2}d+(n-1)d=\left(n-\frac{15}{2}\right)d$,$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-\frac{13}{2}dn+$

$\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}(n^2-14n)$. 对于 A，$S_n=\frac{d}{2}(n^2-14n)=\frac{d}{2}[(n-7)^2-49]$，$\because d<0$，$\therefore$ 当 $n=7$ 时，S_n 取最大值，$\therefore S_7$ 是数列$\{S_n\}$中的最大项，故选项 A 正确；对于 B，$\because a_1>0,d<0$，$\therefore$ 等差数列$\{a_n\}$是递减数列，$\therefore$ 数列$\{a_n\}$中的最大项为 a_1，故选项 B 错误；对于 C，$S_{14}=\frac{d}{2}(14^2-14\times14)=0$，故选项 C 正确；对于 D，$\because d<0$，$\therefore$ 解 $S_n=\frac{d}{2}(n^2-14n)=\frac{d}{2}n(n-14)>0$，得 $0<n<14$，$\because n\in\mathbf{N}_+$，$\therefore$ 满足 $S_n>0$ 的 n 的最大值为 13，故选项 D 正确. 故选 ACD.

5-3. ABD　【解析】因为数列$\{a_n\}$为等差数列，所以 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0$，可得 $a_6>0$，故 A 正确；

又 $S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}<0$，则 $a_1+a_{12}=a_6+a_7<0$，所以 $a_7<0$，所以公差 $d=a_7-a_6<0$，故 B 正确；

结合等差数列性质可知，$a_1>a_2>\cdots>a_6>0>a_7>\cdots$，所以$\{S_n\}$中 S_6 最大，故 C 错误；

因为 $a_4>a_6>0$，$a_9<a_7<0$，且 $a_4+a_9=a_6+a_7<0$，即 $a_4<-a_9$，所以 $|a_4|<|a_9|$，故 D 正确.

故选 ABD.

5-4. D　【解析】因为在等差数列$\{a_n\}$中，$S_5=S_{13}$，所以 $a_6+a_7+\cdots+a_{12}+a_{13}=4(a_9+a_{10})=0$，所以 $a_9+a_{10}=0$.

又 $a_6+a_{14}=2a_{10}<0$，所以 $a_{10}<0$，$a_9>0$，所以 $S_{17}=\frac{17}{2}(a_1+a_{17})=17a_9>0$，$S_{18}=9(a_1+a_{18})=9(a_9+a_{10})=0$，$S_{19}=\frac{19}{2}(a_1+a_{19})=19a_{10}<0$，则使得 $S_n<0$ 的正整数 n 的最小值为 19. 故选 D.

5-5. B　【解析】等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，

由 $S_{13}=13a_7>0$，$S_{14}=14\times\frac{a_7+a_8}{2}<0$ 可得，$a_7>0$，$a_8<0$，则 $d<0$，故 S_n 的最大值

为 S_7.

又 $d<0$, $\{a_n\}$ 为递减数列, 所以 $\frac{S_1}{a_1}$, $\frac{S_2}{a_2}$, $\cdots$, $\frac{S_{13}}{a_{13}}$的前 7 项大于 0, 且 S_n 递增, 后 6 项小于 0,

故 S_n 最大且 a_n 取最小正值时, $\frac{S_n}{a_n}$有最大值, 即$\frac{S_7}{a_7}$最大. 故选 B.

5-6. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,

$\therefore \begin{cases} a_5+a_9=2a_1+12d=-2, \\ S_3=3a_1+3d=57, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a_1=23, \\ d=-4, \end{cases}$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=27-4n$.

(2) 由(1)知, $a_n=27-4n$.

$\therefore S_n=\frac{n(23+27-4n)}{2}=-2n^2+25n=-2\left(n-\frac{25}{4}\right)^2+\frac{625}{8}$.

由二次函数的性质知, 函数 $y=-2x^2+25x$ 的图象的对称轴方程为 $x=\frac{25}{4}$, 且其图象开口向下, 又 $n\in\mathbf{N}_+$,

$\therefore$ 当 n 取 6 时, S_n 取最大值, 最大值为 $S_6=-2\times6^2+25\times6=78$.

6-1. D 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d, 所以 $a_2+a_3=2a_1+3d=64+3d=40$, 解得 $d=-8$, 所以 $a_n=40-8n$. 所以 $|a_n|=|40-8n|=\begin{cases} 40-8n, n\leqslant5, \\ 8n-40, n\geqslant6, \end{cases}$ 所以 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为 $\frac{5\times(32+0)}{2}+\frac{7\times(8+56)}{2}=80+224=304$.

6-2. AC 【解析】对于 A, 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=10$, 公差 $d=-2$, 则 $a_n=a_1+(n-1)d=-2n+12$, $S_7-S_4=a_5+a_6+a_7=3a_6=0$, 故 A 正确;

对于 B, 由 A 得 $a_n=-2n+12$, 则 $a_6=0$, 且 $d=-2$, 当 $n<6$ 时, $a_n>0$, 当 $n>6$ 时, $a_n<0$, 则当 $n=5$ 或 $n=6$ 时, S_n 取得最大值, 且最大值为$\frac{(10+0)\times6}{2}=30$, 故 B 错误;

对于 C, $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=a_1+a_2+\cdots+a_6-a_7-a_8-a_9-a_{10}=S_6+2+4+6+8=$

$30+20=50$，故 C 正确；

对于 D，由 $n\leqslant 2\ 023$，

得 $a_n\geqslant a_{2\ 023}=-4\ 034$，

则数列 $\{a_n\}$ 中与数列 $\{3m+10\}$ 中互为相反数的项依次为 $-16,-22,-28,\cdots,-4\ 030$，

可以组成以 -16 为首项，-6 为公差的等差数列，设该数列为 $\{c_n\}$，

则 $c_n=-10-6n$，若 $c_n=-10-6n=-4\ 030$，解得 $n=670$，即两个数列共有 670 项互为相反数，故 D 错误.

6-3.【解】若选条件①，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d}{n}=a_1+\dfrac{n-1}{2}d.$

$\because \dfrac{S_{10}}{10}-\dfrac{S_5}{5}=-5$，

$\therefore \dfrac{5}{2}d=-5$，得 $d=-2$.

又 $\because a_1=S_1=9$，$\therefore a_n=11-2n$.

(i) 当 $n\leqslant 5$ 时，$a_n>0$，

$T_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$

$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=9n+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)=-n^2+10n.$

(ii) 当 $n\geqslant 6$ 时，$a_n<0$，

$T_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-a_6-\cdots-a_n$

$=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-\left[9n+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)\right]$

$=50-(-n^2+10n)=n^2-10n+50.$

故 $T_n=\begin{cases}-n^2+10n,1\leqslant n\leqslant 5,\\ n^2-10n+50,n\geqslant 6.\end{cases}$

若选条件②，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d. $\because a_1=S_1=9$，

则 $S_8=S_4-8$ 可化为 $8\times 9+\dfrac{8\times 7}{2}d=4\times 9+\dfrac{4\times 3}{2}d-8$，

解得 $d=-2$，故 $a_n=11-2n$.

以下同选条件①.

若选条件③，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d. $\because a_1=S_1=9$，

则 $d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=\frac{1-9}{5-1}=-2$，故 $a_n=11-2n$.

以下同选条件①.

7-1. C 【解析】由题意，$a_n+a_{101-n}=\frac{2n-100}{2n-101}+\frac{2(101-n)-100}{2(101-n)-101}=\frac{2n-100}{2n-101}+\frac{2n-102}{2n-101}=2$，

所以 $a_1+a_{100}=a_2+a_{99}=\cdots=a_{50}+a_{51}=2$，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=(a_1+a_{100})+(a_2+a_{99})+\cdots+(a_{50}+a_{51})=50\times2=100$. 故选 C.

7-2.【解】(1) 由于数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，故 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=a_3+3a_4$，从而可知 $4a_3=3a_4$，

即 $4\left(\frac{\pi}{2}+2d\right)=3\left(\frac{\pi}{2}+3d\right)$，解得 $d=\frac{\pi}{2}$，

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(n-1)=\frac{n\pi}{2}$.

(2) 由于 $b_n=1+\sin 2a_n$，故数列 $\{b_n\}$ 的前 23 项和 $T_{23}=\sin 2a_1+\sin 2a_2+\cdots+\sin 2a_{22}+\sin 2a_{23}+23$，

由于 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_{12}=\frac{\pi}{2}$，所以 $a_1+a_{23}=2a_{12}=\pi$，所以 $2a_1=2\pi-2a_{23}$，

即 $\sin 2a_1+\sin 2a_{23}=0$，同理 $a_2+a_{22}=\cdots=a_{11}+a_{13}=2a_{12}=\pi$，

得到 $\sin 2a_2+\sin 2a_{22}=\cdots=\sin 2a_{11}+\sin 2a_{13}=0$，则由倒序相加法可知

$2T_{23}=(\sin 2a_1+\sin 2a_{23})+(\sin 2a_2+\sin 2a_{22})+\cdots+(\sin 2a_{23}+\sin 2a_1)+46=0+46=46$，

即 $T_{23}=23$.

8-1. ACD 【解析】由题意可知 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$，

则 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，…，$a_n-a_{n-1}=n\ (n\geqslant2)$，

以上 n 个式子累加可得 $a_n-a_1=2+3+\cdots+n\ (n\geqslant2)$，

所以 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ (n\geqslant2)$，且 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

则 $a_4=\frac{4\times5}{2}=10$，所以 $S_4=1+3+6+10=20$，故选项 A 正确；

由递推关系可知 $a_{n+1}-a_n=n+1$，故选项 B 不正确；

当 $n\geqslant2$ 时，$S_n-S_{n-1}=a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，故选项 C 正确；

因为 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)=2\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{200}{101}$，故选项 D 正确.

8-2. $\frac{2\ 023}{2\ 024}$ 【解析】由 $a_n=2n$ 可得 $a_{n+1}-a_n=2$，故 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公差为 2 的等差数列，

所以 $S_n=\frac{(2+2n)n}{2}=n(n+1)$，所以 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_{2\ 023}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\ 023}-\frac{1}{2\ 024}=\frac{2\ 023}{2\ 024}$.

8-3. 【解】$\because \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

$\therefore S_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-\sqrt{1}=\sqrt{n+1}-1$.

由 $S_n=\sqrt{n+1}-1=9$，解得 $n=99$.

8-4. (1)【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由题意得，$\begin{cases}a_1(a_1+3d)=(a_1+d)^2,\\3a_1+3d=a_1+3d+4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=2,\end{cases}$

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$.

(2)【证明】由(1)可知 $a_n=2n$.

记 $T_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$，

则 $T_n=\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\right.$

$\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)=\frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)<\frac{1}{4}$.

8-5. (1)【证明】$\because a_{n+1}+1=\frac{a_n+1}{a_n+2}, a_n\neq-1$

且 $a_n\neq-2$ 且 $a_1=1$, $\therefore \frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n+2}{a_n+1}$,

即 $\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{(a_n+1)+1}{a_n+1}$,

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}+1}-\frac{1}{a_n+1}=1$.

$\because a_1=1$, $\therefore \frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公差为 1 的等差数列.

$\therefore \frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{2}+(n-1)\times1=\frac{2n-1}{2}$,

$\therefore a_n=\frac{3-2n}{2n-1}$.

(2)【解】由(1)知 $b_n=\frac{2n-1}{2}$,

$\therefore \frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,

$\therefore S_n=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{4n}{2n+1}$.

9-1. B 【解析】记第 n 天派出 a_n 人, 则数列 $\{a_n\}$ 是以 65 为首项, 7 为公差的等差数列,

故 $a_n=65+7(n-1)=7n+58$, 故 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=3[7(n+1)+58]=300$, 解得 $n=5$, 故目前一共派出了 7 天, 共派出了 $7\times65+\frac{7\times6}{2}\times7=602$(人), 故选 B.

9-2. D 【解析】设该数列为 $\{a_n\}$, 由题意得, $a_5, a_6, \cdots$ 成等差数列, 公差 $d=2$, $a_5=5$.

设塔群共有 n 层, 则 $1+3+3+5+5(n-4)+\frac{(n-4)(n-5)}{2}\times2=108$, 解得 $n=12$(负值舍去),

故最下面三层的塔数之和为 $a_{10}+a_{11}+a_{12}=3a_{11}=3\times(5+2\times6)=51$. 故选 D.

巩固练

1. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为

d，依题意得$\begin{cases}a_1+4d=7,\\a_1+9d=22,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-5,\\d=3,\end{cases}$所以$S_{10}=10\times(-5)+\frac{10\times9}{2}\times3=85$.

2. A 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_4=2(S_2+S_3)$，$a_1=1$，得$4+6d=2(2+d+3+3d)$，

解得$d=-3$，所以$a_6=1+(6-1)\times(-3)=-14$. 故选 A.

3. A 【解析】由题意可知，$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=3a_4$，所以$a_4=0$.

所以$S_3=S_3+0=S_3+a_4=S_4$. 故选 A.

4. D 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d.

则$\begin{cases}2a_1+11d=5,\\a_1+6d=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=19,\\d=-3,\end{cases}$

所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-\frac{3}{2}n^2+\frac{41}{2}n$.

因为二次函数$y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{41}{2}x$的图象的对称轴为直线$x=\frac{41}{6}$，$n\in\mathbf{N}_+$，所以当$n=7$时，$(S_n)_{\max}=70$. 故选 D.

5. C 【解析】设等差数列的首项为a_1，公差为d，则$\begin{cases}5a_1+20d=15,\\5a_1+25d=30,\end{cases}$解得$d=3$.

6. C 【解析】在等差数列$\{a_n\}$中，易知$S_{18}=9(a_9+a_{10})>0$，$S_{19}=19a_{10}<0$，

所以$a_9+a_{10}>0$，$a_{10}<0$，即$a_9>0>a_{10}$，所以数列$\{a_n\}$为递减数列，且前 9 项和最大. 所以当S_n最大时，n的值为 9.

7. 【解】(1) 由$a_5+a_7=12$，可得$2a_6=12$，即$a_6=6$，

因此，数列$\{a_n\}$的公差$d=\frac{a_6-a_3}{6-3}=\frac{6-3}{6-3}=1$，

即$a_n=a_3+(n-3)d=n$，则$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(1+n)}{2}$.

(2) 由$a_n=n$，可得$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

则 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

8.【解】(1)由 $S_{n+1}=S_n+a_n+1$ 及 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 得 $a_{n+1}-a_n=S_{n+1}-S_n-a_n=1$,故数列$\{a_n\}$是以 a_1 为首项,1 为公差的等差数列.

若选①:$a_4+a_7=2a_1+9d=1$,解得 $a_1=-4$,故 $a_n=-4+(n-1)\times1=n-5$.

若选②:$a_1\cdot a_4=a_3^2$,即 $a_1(a_1+3)=(a_1+2)^2$,解得 $a_1=-4$,故 $a_n=-4+(n-1)\times1=n-5$.

若选③:由 $S_{10}=\frac{(a_1+a_1+9)\times10}{2}=5$,解得 $a_1=-4$,故 $a_n=-4+(n-1)\times1=n-5$.

(2)由(1)得 $a_n=n-5$,

则 $S_n=\frac{(-4+n-5)n}{2}=\frac{\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}}{2}$,$n\in\mathbf{N}_+$,故 S_n 的最小值为 $S_4=S_5=-10$.

9. C 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{4}$,所以 $\frac{4a_1+\frac{4\times(4-1)}{2}d}{8a_1+\frac{8\times(8-1)}{2}d}=\frac{1}{4}$,则 $\frac{4a_1+6d}{8a_1+28d}=\frac{1}{4}$,整理得 $d=2a_1$,

而 $\frac{S_{12}}{S_{16}}=\frac{12a_1+\frac{12\times(12-1)}{2}d}{16a_1+\frac{16\times(16-1)}{2}d}=\frac{12a_1+66d}{16a_1+120d}=\frac{12a_1+132a_1}{16a_1+240a_1}=\frac{144}{256}=\frac{9}{16}$,故选 C.

10. C 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_3+a_7+a_8=a_1+2d+a_1+6d+a_1+7d=3a_1+15d=3a_6$.

因为 $b_2+b_{10}=2b_6$,所以 $\frac{a_3+a_7+a_8}{b_2+b_{10}}=\frac{3a_6}{2b_6}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_6}{b_6}$.

因为等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n,T_n,满足 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+4}{n+2}$,

所以 $\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{\frac{11(a_1+a_{11})}{2}}{\frac{11(b_1+b_{11})}{2}}=\frac{a_6}{b_6}=$

$\frac{3\times11+4}{11+2}=\frac{37}{13}$，所以 $\frac{a_3+a_7+a_8}{b_2+b_{10}}=\frac{3a_6}{2b_6}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_6}{b_6}=\frac{3}{2}\times\frac{37}{13}=\frac{111}{26}$.

11. B 【解析】首付 11 万元，余款 14 万元，由题意可知，是分 7 次还清，

设每次付款数（单位：万元）组成的数列为 $\{a_n\}$，

则 $a_1=2+14\times10\%=3.4$，

$a_2=2+(14-2)\times10\%=3.2$，

$a_3=2+(14-2\times2)\times10\%=3,\cdots$，

$a_n=2+[14-2(n-1)]\times10\%=3.4-0.2(n-1)(n\leqslant7)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3.4，公差为 -0.2 的等差数列，

则 $S_7=7\times3.4+\frac{7\times6}{2}\times(-0.2)=19.6$，

因此购买这辆车小明最后实际共付 $11+19.6=30.6$（万元）. 故选 B.

12. $3n^2+2n$ 【解析】因为数列 $\{2n+1\}$ 是以 3 为首项，以 2 为公差的等差数列，

数列 $\{3n-1\}$ 是以 2 为首项，以 3 为公差的等差数列，

所以这两个数列的公共项所构成的新数列 $\{a_n\}$ 是以 5 为首项，以 6 为公差的等差数列，

所以 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $n\cdot5+\frac{n(n-1)}{2}\cdot6=3n^2+2n$.

13. 【解】方法一：利用等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

由已知得

$$\begin{cases}S_m=ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=30,\\S_{2m}=2ma_1+\frac{2m(2m-1)}{2}d=100,\end{cases}$$

解得 $a_1=\frac{10m+20}{m^2}$，$d=\frac{40}{m^2}$，

所以 $S_{3m}=3ma_1+\frac{3m(3m-1)}{2}d=210$.

方法二：记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，由等差数列前 n 项和的性质知 $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$ 成等差数列，

则 $2(S_{2m}-S_m)=S_m+(S_{3m}-S_{2m})$.

由已知 $S_m=30,S_{2m}=100$,得 $S_{2m}-S_m=100-30=70$,

所以 $S_{3m}-S_{2m}=2(S_{2m}-S_m)-S_m=110$,

所以 $S_{3m}=110+100=210$.

方法三:利用 $S_n=An^2+Bn$(A,B 为常数).

由已知得 $\begin{cases}S_m=Am^2+Bm=30,\\S_{2m}=4Am^2+2Bm=100,\end{cases}$ 解得 $A=\dfrac{20}{m^2},B=\dfrac{10}{m}$,所以 $S_{3m}=9Am^2+3Bm=210$.

方法四:利用 $S_n=An^2+Bn$(A,B 为常数)的变形式.

由 $S_n=An^2+Bn$(A,B 为常数)可得 $\dfrac{S_n}{n}=An+B$,即数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等差数列,

所以$\dfrac{S_m}{m},\dfrac{S_{2m}}{2m},\dfrac{S_{3m}}{3m}$成等差数列,

从而 $2\cdot\dfrac{S_{2m}}{2m}=\dfrac{S_m}{m}+\dfrac{S_{3m}}{3m}$,

所以 $S_{3m}=210$.

14.【解】(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d. 由 $S_3=\dfrac{3(a_1+a_3)}{2}=3a_2=102$,得 $a_2=34$,

由 $2a_4-a_2=2a_4-34=22$,得 $a_4=28$,

所以 $2d=a_4-a_2=-6$,即 $d=-3$,故 $a_1=37$,则 $a_n=40-3n$.

(2)由(1)知 $a_n=40-3n$,由 $a_n=40-3n\geqslant0$,可得 $n\leqslant\dfrac{40}{3}$,即 $n\leqslant13$,故当 $n>13$ 时,$a_n<0$,

所以 $T_{20}=a_1+\cdots+a_{13}-(a_{14}+\cdots+a_{20})=\dfrac{13(a_1+a_{13})}{2}-\dfrac{7(a_{14}+a_{20})}{2}=13\times19-7\times(-11)=324$.

15. ACD 【解析】由题意知,$S_7=7a_1+\dfrac{7\times6}{2}\times2=-56$,解得 $a_1=-14$,所以选项 A 正确,选项 B 不正确.

$a_n=a_1+(n-1)\times2=2n-16$,

由 $a_n<0$,得 $n\leqslant7(n\in\mathbf{N}_+)$,由 $a_n=0$,得 $n=8$,由 $a_n>0$,得 $n\geqslant9(n\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $S_7=S_8$,且 S_7 和 S_8 是数列$\{a_n\}$前 n 项和 S_n 的最小值,故选项 C,D 正确.

故选 ACD.

16. BCD 【解析】对于 A 项,当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=-1$;当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-2$. 当 $n=1$ 时,$a_1=2\neq-1$,所以 $\{a_n\}$ 不是等差数列. 对于 B 项,设公差为 d,首项为 a_1,由题意可知,$a_6=1$,又 $a_3=5$,所以公差 $d=-\dfrac{4}{3}<0$,$a_1=\dfrac{23}{3}>0$,所以 S_n 有最大值. 对于 C 项,由已知可得,前 10 项中,偶数项和为 90,奇数项和为 80,两者作差得 $5d=10$,所以 $d=2$. 对于 D 项,设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,三点分别为 A,B,C,因为 $\dfrac{S_n}{n}=a_1+\dfrac{n-1}{2}d$,则 $\dfrac{S_{10}}{10}=a_1+\dfrac{9}{2}d$,$\dfrac{S_{20}}{20}=a_1+\dfrac{19}{2}d$,$\dfrac{S_{30}}{30}=a_1+\dfrac{29}{2}d$,则 $\overrightarrow{AB}=(10,5d)$,$\overrightarrow{BC}=(10,5d)$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$,且 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$ 有公共点 B,所以 A,B,C 三点共线. 故选 BCD.

17. B 【解析】由题意得第 n 组中有 n 个数,且分子由小到大为 $1,2,3,\cdots,n$,分母由大到小为 $n,n-1,n-2,\cdots,1$. 设 a_{200} 在第 n 组中,则 $\dfrac{(n-1)n}{2}<200\leqslant\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$,

解得 $n=20$,即 a_{200} 在第 20 组中.

前 19 组的数的个数之和为 $\dfrac{19\times20}{2}=190$,即 a_{200} 是第 20 组的第 10 个数,即为 $\dfrac{10}{20-10+1}=\dfrac{10}{11}$,即 $a_{200}=\dfrac{10}{11}$.

故选 B.

5.3 等比数列

5.3.1 等比数列

易错记

1-1. A 【解析】由于数列 $-1,a_1,a_2,-4$ 为等差数列,设其公差为 d,则 $a_2-a_1=d=\dfrac{1}{3}\times[-4-(-1)]=-1$. 因为 $-1,b_1,b_2,b_3,-4$ 为等比数列,所以 $b_2^2=(-1)\times(-4)=4$,所以 $b_2=\pm2$. 又因为 b_2 与第 1

项 -1 同号，所以 $b_2=-2$.

所以 $\frac{a_2-a_1}{b_2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

2-1. -4 【解析】因为 $2a+2$ 是 $a,3a+3$ 的等比中项，所以 $(2a+2)^2=a(3a+3)$，即 $a^2+5a+4=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=-4$. 当 $a=-1$ 时，第 2,3 项均为 0，不符合题意，故舍去；当 $a=-4$ 时，前三项依次为 -4，-6，-9，符合题意，所以 $a=-4$.

2-2.【解】因为 $a_{n+1}=2a_n+\lambda$，所以 $a_{n+1}+\lambda=2(a_n+\lambda)$.

又 $a_1=1$，所以当 $\lambda=-1$ 时，$a_1+\lambda=0$，此时数列 $\{a_n+\lambda\}$ 不是等比数列，$a_n=1$.

当 $\lambda\neq-1$ 时，$a_1+\lambda\neq0$，故 $a_n+\lambda\neq0$，所以数列 $\{a_n+\lambda\}$ 是以 $1+\lambda$ 为首项，2 为公比的等比数列，此时 $a_n+\lambda=(1+\lambda)\cdot2^{n-1}$，即 $a_n=(1+\lambda)\cdot2^{n-1}-\lambda$.

题型诀

1-1. BCD 【解析】对于 A，假设 $a_n=n$，则 $a_1a_2=2$，$a_2a_3=6$，$a_3a_4=12$，此时 a_1a_2，a_2a_3，a_3a_4 不是等差数列，故 A 错误；

对于 B，设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $\frac{2a_3+a_5}{2a_2+a_4}=\frac{2a_1q^2+a_1q^4}{2a_1q+a_1q^3}=\frac{a_1q^2(2+q^2)}{a_1q(2+q^2)}=q$，$\frac{2a_2+a_4}{2a_1+a_3}=\frac{2a_1q+a_1q^3}{2a_1+a_1q^2}=\frac{a_1q(2+q^2)}{a_1(2+q^2)}=q$，故 $\frac{2a_3+a_5}{2a_2+a_4}=\frac{2a_2+a_4}{2a_1+a_3}$，故 $2a_1+a_3$，$2a_2+a_4$，$2a_3+a_5$ 是等比数列，故 B 正确；

对于 C，由题意可得 $a_3-a_2=a_2-a_1$，又 $\frac{2^{a_3}}{2^{a_2}}=2^{a_3-a_2}$，$\frac{2^{a_2}}{2^{a_1}}=2^{a_2-a_1}$，故 $\frac{2^{a_3}}{2^{a_2}}=\frac{2^{a_2}}{2^{a_1}}$，故 2^{a_1}，2^{a_2}，2^{a_3} 是等比数列，故 C 正确；

对于 D，由题意可得 $2\ln a_2=\ln a_1+\ln a_3$，即 $\ln a_2^2=\ln(a_1a_3)$，故 $a_2^2=a_1a_3$，则 $(a_2^2)^2=a_1^2a_3^2$，因为 $a_1^2,a_2^2,a_3^2>0$，则 a_1^2，a_2^2，a_3^2 是等比数列，故 D 正确. 故选 BCD.

1-2.【证明】设等比数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公比分别为 p,q，$p\neq q\neq0$.

要证 $\{c_n\}$ 不是等比数列，可证 $c_2^2\neq c_1c_3$.

事实上，$c_2^2=(a_1p+b_1q)^2=a_1^2p^2+b_1^2q^2+2a_1b_1pq$，

$c_1c_3=(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)$，

$\therefore c_1c_3-c_2^2=a_1b_1(p^2+q^2)-2a_1b_1pq=$

$a_1b_1(p-q)^2$.

$\because a_1,b_1\neq 0,p\neq q\neq 0,\therefore c_1c_3-c_2^2\neq 0$,

即 $c_2^2\neq c_1c_3$.

$\therefore \{c_n\}$不是等比数列.

1-3.【证明】因为 $b_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{2n-1}(n\geqslant 2)$,

$(6n-3)a_n=(2n+1)a_{n-1}(n\geqslant 2)$,

所以 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{(2n-1)a_n}{(2n+1)a_{n-1}}=\dfrac{(2n-1)a_n}{(6n-3)a_n}=\dfrac{1}{3}$ $(n\geqslant 2)$.

又 $b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$,所以$\{b_n\}$是首项为$\dfrac{1}{3}$,公比为$\dfrac{1}{3}$的等比数列.

于是$\dfrac{a_n}{2n+1}=b_n=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$,

故 $a_n=(2n+1)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

2-1. A 【解析】由已知可得 $a_2=2S_1=2$,当 $n\geqslant 2$ 时,由 $a_{n+1}=2S_n$,可知 $a_n=2S_{n-1}$,两式作差可得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$,则 $a_{n+1}=3a_n$,又$\dfrac{a_2}{a_1}=2\neq 3$,所以$\{a_n\}$是从第二项开始以 2 为首项,3 为公比的等比数列,所以 $a_{2\,023}=a_2\times 3^{2\,021}=2\times 3^{2\,021}$. 故选 A.

2-2. 3 【解析】由$\begin{cases}a_5=2S_4+3,\\a_6=2S_5+3,\end{cases}$两个等式作差可得 $a_6-a_5=2a_5$,则 $a_6=3a_5$,所以 $q=\dfrac{a_6}{a_5}=3$.

2-3.【解】(1)设$\{a_n\}$的公比为 q.

由已知得$\begin{cases}a_1q^4=8,\\a_1q^6=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}q^2=\dfrac{1}{4},\\a_1=128.\end{cases}$

$\because a_n>0,\therefore q=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore a_n=128\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-8}$.

(2)由 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$,得$\dfrac{1}{3}=\dfrac{9}{8}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$,

即$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{8}{27}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$,故 $n=4$.

(3)$\because a_{n+4}=a_4q^{(n+4)-4}=a_4q^n,a_{n+4}=a_4$,

$\therefore q^n=1$ 对任意 $n\in\mathbf{N}_+$均成立,

$\therefore q=1$.

3-1. A 【解析】$\{a_n\}$是正项等比数列,

$a_n>0$, $T_n\neq 0$, $n\in\mathbf{N}_+$, 所以由 $T_{2\,017}=T_{2\,021}=T_{2\,017}\cdot a_{2\,018}a_{2\,019}a_{2\,020}a_{2\,021}$,

得 $a_{2\,018}a_{2\,019}a_{2\,020}a_{2\,021}=1$,

所以 $a_{2\,018}a_{2\,021}=a_{2\,019}a_{2\,020}=1$.

设数列$\{a_n\}$的公比为 q,$q>0$ 且 $q\neq 1$,

则 $a_{2\,018}a_{2\,021}=\dfrac{a_{2\,021}^2}{q^3}=1$,$a_{2\,019}a_{2\,020}=\dfrac{a_{2\,020}^2}{q}=1$,即 $a_{2\,021}=q^{\frac{3}{2}}$,$a_{2\,020}=q^{\frac{1}{2}}$,

所以 $\dfrac{\ln a_{2\,020}}{\ln a_{2\,021}}=\dfrac{\ln q^{\frac{1}{2}}}{\ln q^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{1}{2}\ln q}{\frac{3}{2}\ln q}=\dfrac{1}{3}$. 故选 A.

3−2. 【解】(1)因为$\{a_n\}$为等比数列,且 $a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=36$,

所以 $a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=36$,即$(a_3+a_5)^2=36$.

又 $a_n>0$,所以 $a_3+a_5=6$.

(2)根据等比数列的性质可得 $a_1\cdot a_5=a_3^2=16$,所以 $a_3=\pm 4$,

所以公比 $q=\dfrac{a_4}{a_3}=\pm 2$,所以 $q^2=4$,所以 $a_6=a_4\cdot q^2=32$.

4−1. 【解】将 $a_2^2=a_1a_3$ 代入已知,得 $a_2^3=8$,∴ $a_2=2$.

设$\{a_n\}$的前三项分别为$\dfrac{2}{q}$,2,$2q$,

则有$\dfrac{2}{q}+2+2q=7$,

整理得 $2q^2-5q+2=0$,

解得 $q=2$ 或 $q=\dfrac{1}{2}$. ∴ $\begin{cases}a_1=1,\\q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=4,\\q=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ ∴ $a_n=2^{n-1}$ 或 $a_n=2^{3-n}$.

5−1. B 【解析】由已知 $a_1(q-1)<0$,可得$\begin{cases}a_1>0,\\q<1(q\neq 0)\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0,\\q>1,\end{cases}$且 $a_n=a_1q^{n-1}$,

此时$\{a_n\}$不一定是递减数列,所以“$a_1(q-1)<0$”不是“$\{a_n\}$为递减数列”的充分条件;

若$\{a_n\}$为递减数列,可得$\begin{cases}a_1>0,\\0<q<1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0,\\q>1,\end{cases}$所以 $a_1(q-1)<0$,

所以“$a_1(q-1)<0$”是“$\{a_n\}$为递减数列”

的必要条件.

综上,“$a_1(q-1)<0$”是“$\{a_n\}$为递减数列”的必要不充分条件. 故选 B.

5-2. C 【解析】根据$\{a_n\}$为递增数列一定能推出 $a_2>a_1$.

当 $a_2>a_1$ 时,有 $a_1q>a_1$,

若 $a_1>0$, 则有 $q>1$, $a_{n+1}-a_n=a_1q^n-a_1q^{n-1}=a_1q^{n-1}(q-1)>0\Rightarrow a_{n+1}>a_n$, 因此$\{a_n\}$为递增数列;

若 $a_1<0$, 则有 $0<q<1$, $a_{n+1}-a_n=a_1q^n-a_1q^{n-1}=a_1q^{n-1}(q-1)>0\Rightarrow a_{n+1}>a_n$, 因此$\{a_n\}$为递增数列.

所以由 $a_2>a_1$ 一定能推出$\{a_n\}$为递增数列. 因此“$a_2>a_1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的充要条件. 故选 C.

6-1. B 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$.

$\because a_1, \dfrac{1}{2}a_3, 2a_2$ 成等差数列, $\therefore a_3=a_1+2a_2$,

$\therefore a_1q^2=a_1+2a_1q$, 又 $a_1\neq 0$, $\therefore q^2-2q-1=0$, 解得 $q=1+\sqrt{2}$ 或 $q=1-\sqrt{2}$(不合题意, 舍去). $\therefore \dfrac{a_8+a_9}{a_7+a_8}=q=1+\sqrt{2}$. 故选 B.

6-2. BC 【解析】由 a_3, a_5, a_8 成等比数列, 得 $a_3a_8=a_5^2$, 即 $(a_1+2d)(a_1+7d)=(a_1+4d)^2$, 即 $a_1d=2d^2$, 又公差 d 和首项 a_1 都不等于 0, 则 $a_1=2d$, 故 C 正确, D 错误;

所以$\dfrac{a_1+a_5+a_9}{a_3+a_4}=\dfrac{3a_1+12d}{2a_1+5d}=\dfrac{18d}{9d}=2$, 故 A 错误, B 正确. 故选 BC.

6-3. D 【解析】$\because \{a_n\}$是等比数列,

$\therefore a_2a_{12}=a_7^2=4a_7$,

$\therefore a_7=4$ 或 $a_7=0$(舍去), $\therefore b_7=a_7=4$.

$\because \{b_n\}$是等差数列, $\therefore b_3+b_{11}=2b_7=8$. 故选 D.

6-4. 【解】因为 $3a, 4b, 5c$ 成等比数列, 所以 $(4b)^2=3a\cdot 5c$. 因为$\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$成等差数列, 所以 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$. 联立

$\begin{cases}(4b)^2=3a\cdot 5c,\\ \dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c},\end{cases}$ 消去 b 得 $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)^2\cdot$

$15ac=64$，即$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ac}\right)\cdot ac=\frac{64}{15}$，所以$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{34}{15}$.

7-1. C 【解析】$\because a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$，$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+1}{2a_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$. 又$\frac{1}{a_1}-1=-\frac{1}{2}$，$\therefore$ 数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是首项为$-\frac{1}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列. 故选 C.

7-2. 【解】(1) 因为 $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$，所以 $a_{n+2}-3a_{n+1}=3a_{n+1}-9a_n$，即 $a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$，

又 $b_n=a_{n+1}-3a_n$，$b_1=a_2-3a_1=6$，所以数列$\{b_n\}$是以 6 为首项，3 为公比的等比数列，

故 $b_n=6\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^n$.

(2) 由(1)知，$a_{n+1}-3a_n=2\cdot 3^n$，

所以$\frac{a_{n+1}}{3^n}-\frac{a_n}{3^{n-1}}=2$，

所以数列$\left\{\frac{a_n}{3^{n-1}}\right\}$为等差数列，且公差为 2，所以$\frac{a_n}{3^{n-1}}=\frac{a_1}{3^0}+2(n-1)=2n+1$，

所以 $a_n=(2n+1)\cdot 3^{n-1}$.

8-1. A 【解析】设“衰分比”为 $a(a>0)$，甲衰分得 b 石.

由题意得$\begin{cases}b(1-a)^2=80,\\ b(1-a)+b(1-a)^3=164,\\ b+80+164=m,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=125,\\ a=20\%,\\ m=369.\end{cases}$故选 A.

8-2. (1) 630　(2) 3　【解析】(1) 由题意可得$\begin{cases}a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n+\frac{3}{10}b_n,\\ a_n+b_n=1\ 050.\end{cases}$

若每个周一选 A 套餐的人数总相等，

则 $a_{n+1}=a_n$，则$\begin{cases}a_1=\frac{4}{5}a_1+\frac{3}{10}b_1,\\ a_1+b_1=1\ 050,\end{cases}$

解得 $a_1=630$.

（2）由 $\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{4}{5}a_n+\dfrac{3}{10}b_n,\\ a_n+b_n=1\ 050,\end{cases}$ 可得 $a_{n+1}=\dfrac{4}{5}a_n+\dfrac{3}{10}(1\ 050-a_n)$，

整理得 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+315$，

则 $a_{n+1}-630=\dfrac{1}{2}(a_n-630)$.

$\because a_1-630=-280$，$\therefore \{a_n-630\}$ 是首项为 -280，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，

$\therefore a_n-630=-280\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

即 $a_n=630-280\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

令 $a_n>b_n$，即 $a_n>1\ 050-a_n$，即 $a_n>525$.

由 $630-280\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}>525$，

可得 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}<\dfrac{3}{8}<\dfrac{1}{2}$，

$\therefore n-1>1$，即 $n>2$，

故从第 3 个周一开始，选 A 套餐的人数首次超过选 B 套餐的人数.

9-1.【解】（1）当 $\lambda=1$ 时，$S_n=3^n-2$①.

当 $n=1$ 时，$S_1=1=a_1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=3^{n-1}-2$②，

由①-②整理得，$a_n=2\times 3^{n-1}(n\geqslant 2)$，$n=1$ 时，$a_1=1$ 不符合此式.

综上，$a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ 2\times 3^{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$

（2）假设存在. 由 $S_n=\lambda\cdot 3^n-3\lambda+1$ 可得，$S_{n-1}=\lambda\cdot 3^{n-1}-3\lambda+1(n\geqslant 2)$，两式相减可得，$a_n=2\lambda\cdot 3^{n-1}$；

又当 $n=1$ 时，$S_1=3\lambda-3\lambda+1=1=a_1$，若 a_1 适合上式，则 $2\lambda=1$，得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$. 故存在实数 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 使得数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

9-2.【解】（1）由 $a_{n+2}=\lambda a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n$，得 $a_{n+2}+a_{n+1}=(\lambda+1)\cdot(a_{n+1}+a_n)-\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)a_n$.

因为 $b_n=a_{n+1}+a_n$，所以 $b_{n+1}=(\lambda+1)b_n-\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)a_n$.

要使数列$\{b_n\}$是等比数列,需使$-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)a_n=0$对任意$n\in\mathbf{N}_+$恒成立,因为当$n=2$时,$a_2=1\neq0$,所以$a_n$不恒为0,所以$-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=0$,解得$\lambda=-\frac{1}{2}$.

此时$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$,且首项$b_1=a_1+a_2=0+1=1$,

所以存在实数$\lambda=-\frac{1}{2}$,使得数列$\{b_n\}$是首项为1,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

(2)由(1)知,$b_n=a_{n+1}+a_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

所以$2^na_{n+1}+2^na_n=2$.

令$c_n=2^na_n$,得$\frac{1}{2}c_{n+1}+c_n=2$,

即$c_{n+1}=-2c_n+4$,

所以$c_{n+1}-\frac{4}{3}=-2\left(c_n-\frac{4}{3}\right)$.

因为$a_1=0$,所以$c_1-\frac{4}{3}=2a_1-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$,

所以数列$\left\{c_n-\frac{4}{3}\right\}$是以$-\frac{4}{3}$为首项,$-2$为公比的等比数列,

所以$c_n-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1}$,

即$2^na_n=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\cdot(-2)^{n-1}$,

所以$a_n=\frac{4}{3\cdot2^n}-\frac{4}{3}\cdot\frac{(-2)^{n-1}}{2^n}=\frac{2^{2-n}}{3}-(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}$,

即$a_n=\frac{2^{2-n}}{3}-(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}(n\in\mathbf{N}_+)$.

巩固练

1. D 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,又a_1,a_4,a_{10}成等比数列,所以$a_4^2=a_1\cdot a_{10}$,则$(3+3d)^2=3\times(3+9d)$,解得$d=0$或$d=1$,所以$a_n=3$或$a_n=n+2$.故选D.

2. C 【解析】数列$\{a_n\}$的前n项和满足$a_{n+1}=2S_n$,当$n\geqslant2$时,$a_n=2S_{n-1}$,两式相减,得$a_{n+1}-a_n=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$,则$a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$,

由 $a_1=2$，得 $a_2=2S_1=4$，$a_2=2a_1$，不满足上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}2, n=1,\\ 4\cdot 3^{n-2}, n\geqslant 2,\end{cases}$

因此，数列 $\{a_n\}$ 既不是等差数列也不是等比数列，故 A，B 错误；

由题知 $S_{n+1}-S_n=2S_n$，$n\in\mathbf{N}_+$，则 $S_{n+1}=3S_n$，而 $S_1=a_1=2$，

因此数列 $\{S_n\}$ 是首项为 2，公比为 3 的等比数列，故 C 正确，D 错误. 故选 C.

3. B 【解析】$\because$ 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，a_2，a_{18} 是方程 $x^2+6x+4=0$ 的两根，

$\therefore a_2a_{18}=4$，$a_2+a_{18}=-6$，

$\therefore a_2<0$ 且 $a_{18}<0$，$\therefore a_{10}<0$，

$\therefore a_4a_{16}=a_2a_{18}=4$，$a_{10}^2=a_2a_{18}=4$，

$\therefore a_{10}=-2$，$\therefore a_4a_{16}+a_{10}=4-2=2$，故选 B.

4. 240 【解析】因为 $a_1+a_2=a_1(1+q)=30$，$a_3+a_4=a_1q^2(1+q)=60$，所以 $q^2=2$，所以 $a_7+a_8=a_1q^6(1+q)=[a_1(1+q)]\cdot(q^2)^3=30\times 8=240$.

5. $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q.

显然 $a_n\neq 0$，由 $a_5^2=a_{10}$，可得 $a_1^2q^8=a_1q^9$，所以 $a_1=q$，

由 $2(a_n+a_{n+2})=5a_{n+1}$，即 $2(a_n+a_nq^2)=5a_nq$，可得 $2q^2-5q+2=0$，

解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$. 因为数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，所以 $q=\frac{1}{2}$，则 $a_1=\frac{1}{2}$，故 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

6. B 【解析】不妨设插入的两个正数为 a，b，则数列为 3，a，b，9.

由 3，a，b 成等比数列，可得 $a^2=3b$，

由 a，b，9 成等差数列，可得 $a+9=2b$，

即 $\begin{cases}a^2=3b,\\ a+9=2b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{9}{2},\\ b=\frac{27}{4}\end{cases}$ 或

$\begin{cases}a=-3,\\b=3\end{cases}$(舍去). 则 $a+b=\dfrac{45}{4}=11\dfrac{1}{4}$.

故选 B.

7. C 【解析】因为 $a_n=a_1q^{n-1}$, 若 $q<0$, 则数列 $\{a_n\}$ 为摆动数列, 与题意不符, 所以 $q>0$.

①若 $a_1<0$, 则对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$, $a_n<0$, 由 $a_n<a_{n+1}=a_nq$ 可得 $q<1$, 即 $0<q<1$;

②若 $a_1>0$, 则对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$, $a_n>0$, 由 $a_n<a_{n+1}=a_nq$ 可得 $q>1$, 此时 $q>1$.

所以 $\{a_n\}$ 为递增数列的充要条件是 $a_1>0, q>1$ 或 $a_1<0, 0<q<1$.

当 $a_1>0, q>1$ 时, $\lg q>0$, 则 $a_1\lg q>0$;

当 $a_1<0, 0<q<1$ 时, $\lg q<0$,

则 $a_1\lg q>0$.

因此, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列的充要条件是 $a_1\lg q>0$. 故选 C.

8. (1)【证明】因为 $2S_n+a_n=2n$①, 所以当 $n=1$ 时, $2S_1+a_1=2$,

即 $2a_1+a_1=2$, 所以 $a_1=\dfrac{2}{3}$.

当 $n\geqslant 2$ 时, $2S_{n-1}+a_{n-1}=2(n-1)$②,

①−②得 $2a_n+a_n-a_{n-1}=2$,

即 $a_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}+\dfrac{2}{3}$,

所以 $a_n-1=\dfrac{1}{3}(a_{n-1}-1)(n\geqslant 2)$,

又 $a_1-1=-\dfrac{1}{3}\neq 0$,

所以 $\{a_n-1\}$ 是以 $-\dfrac{1}{3}$ 为首项, $\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

(2)【解】由(1)知, $a_n-1=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{3^n}$,

所以 $a_n=1-\dfrac{1}{3^n}$.

9. 【解】(1)设 $\{a_n\}$ 的公比为 q, $q>0$, 又 $a_3=8$, $S_2=48$,

则 $\begin{cases}a_1q^2=8,\\a_1+a_1q=48,\end{cases}$ 解得 $q=\dfrac{1}{2}$ 或 $q=-\dfrac{1}{3}$(不合题意, 舍去),

所以 $a_1=\dfrac{8}{q^2}=32$,

$a_n=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{6-n}$.

$b_n=4\log_2 a_n=4\log_2 2^{6-n}=4\times(6-n)=-4n+24$,

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{6-n}$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=-4n+24$.

(2) 由 $b_n\neq 0$，得 $m\neq 4$. $\frac{b_m\cdot b_{m+1}}{b_{m+2}}=\frac{(24-4m)(20-4m)}{16-4m}=\frac{4(6-m)(5-m)}{4-m}$.

由于 $m\in\mathbf{N}_+$，令 $t=4-m$，则 $t\leqslant 3$，$t\neq 0$，$t\in\mathbf{Z}$，

所以 $\frac{b_m\cdot b_{m+1}}{b_{m+2}}=\frac{4(2+t)(1+t)}{t}=4\left(t+\frac{2}{t}+3\right)$.

设 $\frac{b_m\cdot b_{m+1}}{b_{m+2}}$ 是数列 $\{b_n\}$ 中的第 m_0 项，则 $4\left(t+\frac{2}{t}+3\right)=4(6-m_0)$.

因为 $m_0\in\mathbf{N}_+$，所以 $t+\frac{2}{t}+3$ 为小于等于 5 的整数，所以 t 为 2 的约数，所以 $t\in\{-2,-1,1,2\}$.

当 $t=1$ 或 $t=2$ 时，$t+\frac{2}{t}+3=6$，不合题意；

当 $t=-1$ 或 $t=-2$ 时，$t+\frac{2}{t}+3=0$，与题意相符.

所以当 $t=-1$ 或 $t=-2$，即 $m=5$ 或 $m=6$ 时，$\frac{b_m\cdot b_{m+1}}{b_{m+2}}$是数列$\{b_n\}$中的项.

10. BC 【解析】由题意可设三角形的三边分别为$\frac{a}{q}$，a，aq($aq\neq 0$).

因为三角形的两边之和大于第三边，

①当 $q>1$ 时，$\frac{a}{q}+a>aq$，即 $q^2-q-1<0$，解得 $1<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；

②当 $0<q<1$ 时，$a+aq>\frac{a}{q}$，即 $q^2+q-1>0$，解得$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<q<1$；

③当 $q=1$ 时，此时三边相等.

综上，q 的取值范围是 $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$，则可能的值是 $\frac{3}{2}$ 与 $\frac{3}{4}$. 故选 BC.

11. BD 【解析】对于 A，当数列是由 0 组成的常数列时，显然不是等比数列，故 A 错误；

对于 B，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则有 $a_{n+1}-a_n=d(n\in\mathbf{N}_+)$，

由 $\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=2^{a_{n+1}-a_n}=2^d$ 为非零常数可知，$\{2^{a_n}\}$ 为等比数列，故 B 正确；

对于 C，由 $S_n=3^{n-1}-1$，可得当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3^0-1=0$，

故数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列，故 C 错误；

对于 D，因为 $a_n+a_{n+1}=17-2n$，所以 $a_{n-1}+a_n=19-2n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$，

两式相减，可得 $a_{n+1}-a_{n-1}=-2$，即数列 $\{a_n\}$ 的奇数项构成首项为 10，公差为 -2 的等差数列，

故 $a_{2k-1}=10+(k-1)\times(-2)=12-2k$ $(k\in\mathbf{N}_+)$，故 D 正确. 故选 BD.

5.3.2 等比数列的前 n 项和

易错记

1-1. 【解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq 0)$.

当 $q=1$ 时，$a_3=4$，则 $a_1=a_2=a_3=4$，

$S_3=a_1+a_2+a_3=12$，$\therefore q=1$ 符合题意，此时 $a_n=4$.

当 $q\neq 1$ 时，$\begin{cases}a_3=a_1q^2=4,\\ S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=12,\end{cases}$

解得 $q=-\frac{1}{2}$，$\therefore a_n=a_3q^{n-3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$.

综上，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=4$ 或 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$.

2-1. 【解】(1) $\because S_n=2a_n-3n(n\in\mathbf{N}_+)$，$\therefore S_1=a_1=2a_1-3$，

$\therefore a_1=3$.

由 $\begin{cases}S_{n+1}=2a_{n+1}-3(n+1),\\ S_n=2a_n-3n\end{cases}$ 得 $a_{n+1}=2a_n+3$，

$\therefore a_{n+1}+3=2(a_n+3)$.

又 $a_1+3=6\neq 0$,∴ 数列 $\{a_n+3\}$ 是以 6 为首项,2 为公比的等比数列.

$\therefore a_n+3=6\times 2^{n-1}$,

$\therefore a_n=3\times 2^n-3(n\in \mathbf{N}_+)$.

(2)$\because a_n=3\times 2^n-3$,

若 a_m,a_r,a_k 成等比数列,则 $a_ma_k=a_r^2$,

即 $(2^m-1)\cdot(2^k-1)=(2^r-1)^2$,$2^{m+k}-2^k-2^m=2^{2r}-2\times 2^r$.

由题意得 $m+k=2r$,$\therefore 2^{m+k}=2^{2r}$,

$\therefore 2^m+2^k=2\times 2^r$,

$\therefore 2^{k-m}+1=2\times 2^{r-m}$.

$\because m<r<k,m,r,k\in \mathbf{N}_+$,$\therefore k-m,r-m\in \mathbf{N}_+$,

$\therefore 2^{k-m},2^{r-m}$ 均为偶数.

$\therefore 2^{k-m}+1$ 为奇数,$2\times 2^{r-m}$ 为偶数,

$\therefore 2^{k-m}+1=2\times 2^{r-m}$ 不可能成立,

$\therefore a_m,a_r,a_k$ 不可能构成等比数列.

题型诀

1-1. C 【解析】由题知显然 $q\neq 1$,

则 $\dfrac{S_6}{S_2}=\dfrac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=\dfrac{1-q^6}{1-q^2}=\dfrac{1^3-(q^2)^3}{1-q^2}=\dfrac{(1-q^2)(1+q^2+q^4)}{1-q^2}=1+q^2+q^4=7$,

即 $q^4+q^2-6=0$,

解得 $q^2=2$ 或 $q^2=-3$(舍),

所以 $\dfrac{S_8}{S_4}=\dfrac{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}=\dfrac{1-q^8}{1-q^4}=1+q^4=5$,故选 C.

1-2. C 【解析】∵ 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3(2^n+m)$,

$\therefore a_1=S_1=3(2+m)=6+3m$,

$a_2=S_2-S_1=3(2^2+m)-3(2+m)=6$,

$a_3=S_3-S_2=3(2^3+m)-3(2^2+m)=12$.

$\because a_1,a_2,a_3$ 是等比数列,

$\therefore a_2^2=a_1a_3$,$\therefore 36=12(6+3m)$,

解得 $m=-1$,$\therefore a_1=3$,公比 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=2$,

$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}$. $\therefore a_n^2=9\times 4^{n-1}$,则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\dfrac{9(1-4^n)}{1-4}=3(4^n-1)$. 故选 C.

1-3. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比

为 q，则由 $\begin{cases}a_5-a_3=a_1q^4-a_1q^2=12,\\a_6-a_4=a_1q^5-a_1q^3=24,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\q=2.\end{cases}$ 所以 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$，$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$，所以 $\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$，故选 B.

1-4. D 【解析】由 $a_{n+1}+a_n=2n+3$，得 $a_{n+1}-(n+1)-1=-(a_n-n-1)$，

$\therefore \{a_n-n-1\}$ 是首项为 a_1-2，公比为 -1 的等比数列，

$\therefore a_n-n-1=(-1)^{n-1}(a_1-2)$，

$\therefore a_n=(-1)^{n-1}(a_1-2)+n+1$，$a_m=(-1)^{m-1}(a_1-2)+m+1$，

$S_{17}=a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{16}+a_{17})=a_1+2\times(2+4+\cdots+16)+3\times8=a_1+168.$

①m 为奇数时，$a_1-2+m+1=a_1+168$，解得 $m=169$；

②m 为偶数时，$-(a_1-2)+m+1=a_1+168$，整理得 $m=2a_1+165$.

$\because a_1\in\mathbf{Z}$，$m=2a_1+165$ 只能为奇数，

$\therefore m$ 为偶数时，无解.

综上所述，$m=169$.

1-5. -63 【解析】方法一：由题知 $S_n=2a_n+1(n\geqslant1)$，①

$\therefore S_{n-1}=2a_{n-1}+1(n\geqslant2)$. ②

当 $n\geqslant2$ 时，①−②，得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，

$\therefore a_n=2a_{n-1}$.

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1+1$，解得 $a_1=-1$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 -1 为首项，2 为公比的等比数列.

$\therefore S_6=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{-1\times(1-2^6)}{1-2}=-63.$

方法二：由题知当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=2(S_n-S_{n-1})+1$，

$\therefore S_n=2S_n-2S_{n-1}+1$，$\therefore S_n=2S_{n-1}-1$. ③

构造 $S_n-\lambda=2(S_{n-1}-\lambda)$，

$\therefore S_n-\lambda=2S_{n-1}-2\lambda$，

$\therefore S_n=2S_{n-1}-\lambda$. ④

$\because$ ③④两式对应项相等，$\therefore \lambda=1$.

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1+1$，解得 $a_1=-1$，

$\therefore S_1-1=-2$.

$\therefore \{S_n-1\}$ 是以 $S_1-1=-2$ 为首项，2 为公比的等比数列.

$\therefore S_n-1=-2\times2^{n-1}=-2^n$,

$\therefore S_n=1-2^n$, $\therefore S_6=1-2^6=-63$.

2-1. B 【解析】设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，所有项之和为 S. 由$\{a_n\}$的前四项之和等于第五项起以后所有项之和，得 $S=2S_4$.

由题意得$\frac{a_1}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^4)}{1-q}$，解得 $q^4=\frac{1}{2}$，

则 $q=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

因为数列$\{a_{2n-1}\}$为$\{a_n\}$的奇数项组成的数列，所以数列$\{a_{2n-1}\}$为公比为 $q^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的等比数列. 故选 B.

2-2. $\frac{3}{2}$ 【解析】因为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且由$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{1}{2}$知 $q\neq1$，

所以 S_n, $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_{2n}$, …成等比数列，

所以 S_5, $S_{10}-S_5$, $S_{15}-S_{10}$ 成等比数列.

因为$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{1}{2}$，所以 $S_5=2S_{10}$，

即 $2S_{10}$, $-S_{10}$, $S_{15}-S_{10}$ 成等比数列，

所以 $2S_{10}\cdot(S_{15}-S_{10})=(-S_{10})^2$，即 $S_{15}=\frac{3}{2}S_{10}$. 所以$\frac{S_{15}}{S_{10}}=\frac{3}{2}$.

2-3. $\frac{1}{2}$　2 【解析】设$\{a_n\}$共有$(2m+1)$项，奇数项之和为 $S_奇$，偶数项之和为 $S_偶$，由题意得 $S_奇=a_1+a_3+\cdots+a_{2m+1}=\frac{85}{32}$，

$S_偶=a_2+a_4+\cdots+a_{2m}=\frac{21}{16}$，

则 $S_奇=a_1+a_2q+\cdots+a_{2m}q=2+q(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})=2+\frac{21}{16}q=\frac{85}{32}$，解得 $q=\frac{1}{2}$.

故 $T_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=a_1^nq^{1+2+\cdots+n-1}=2^n\times\frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}=2^{\frac{3n}{2}-\frac{n^2}{2}}$，

当 $n=1$ 或 2 时，T_n 取得最大值 2.

2-4. 【证明】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由已知得 $a_1>0$, $q>0$.

$\because S_{n+1}=a_1+qS_n$, $S_{n+2}=a_1+qS_{n+1}$,

$\therefore S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2$

$=S_n(a_1+qS_{n+1})-(a_1+qS_n)S_{n+1}$

$=a_1S_n+qS_nS_{n+1}-a_1S_{n+1}-qS_nS_{n+1}$

$=a_1(S_n-S_{n+1})=-a_1a_{n+1}<0$,

$\therefore S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$.

根据对数函数的单调性,得 $\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}>2\log_{0.5}S_{n+1}$.

3-1. B 【解析】$\because a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2^2}a_3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}a_n=n$,

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时,$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2^2}a_3+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\cdot a_{n-1}=n-1$,两式相减得 $\frac{1}{2^{n-1}}a_n=1$,

$\therefore a_n=2^{n-1}$,

当 $n=1$ 时,$a_1=1$,满足 $a_n=2^{n-1}$,

则 $a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$,$\therefore na_n=n\cdot 2^{n-1}$.

设数列$\{na_n\}$的前 n 项和为 S_n,

$\therefore S_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}$,

$2S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$,

两式相减得 $-S_n=1-n\cdot 2^n+(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})=1-n\cdot 2^n+\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=(1-n)\cdot 2^n-1$,$\therefore S_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. 故选 B.

3-2. 【解】(1)设$\{a_n\}$的公比为 q,由题设得 $2a_1=a_2+a_3$,即 $2a_1=a_1q+a_1q^2$.

所以 $q^2+q-2=0$,解得 $q=1$(舍去),$q=-2$. 故$\{a_n\}$的公比为-2.

(2)记 S_n 为$\{na_n\}$的前 n 项和. 由(1)及题设可得,$a_n=(-2)^{n-1}$,所以 $S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\times(-2)^{n-1}$,

$-2S_n=-2+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n-1}+n\times(-2)^n$.

可得 $3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\times(-2)^n$

$=\frac{1-(-2)^n}{3}-n\times(-2)^n$.

所以 $S_n=\frac{1}{9}-\frac{(3n+1)(-2)^n}{9}$.

4-1. A 【解析】因为$\{a_n\}$是以 1 为首项,2 为公差的等差数列,所以 $a_n=2n-1$.

因为$\{b_n\}$是以 1 为首项,2 为公比的等比数列,所以 $b_n=2^{n-1}$.

所以 $c_n=a_{b_n}=a_{2^{n-1}}=2\times 2^{n-1}-1=2^n-1$.

所以 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$=(2-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)$

$=(2+2^2+\cdots+2^n)-n=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2.$

因为 $T_n<2\ 022$，所以 $2^{n+1}-n-2<2\ 022$，

当 $n=10$ 时，$2^{11}-10-2=2\ 048-10-2=2\ 036>2\ 022$，不符合题意；

当 $n=9$ 时，$2^{10}-9-2=1\ 013<2\ 022$，符合题意，

所以当 $T_n<2\ 022$ 时，n 的最大值是 9. 故选 A.

4-2.【解】(1) 由题意得 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$，即数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 为常数列，因为 $\dfrac{a_1}{1}=-1$，所以 $a_n=-n$.

(2) 由 (1) 可得 $b_n=2^n+(-n)\cdot\cos n\pi$，

$T_{2n}=2^1+1+2^2-2+2^3+3+\cdots+2^{2n}-2n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2n}+(1-2)+(3-4)+\cdots+(2n-1-2n)=\dfrac{2(2^{2n}-1)}{2-1}-n=2^{2n+1}-2-n.$

5-1.【解】当 n 为奇数时，由 $a_{n+2}=a_n+2$ 可知，$\{a_n\}$ 的奇数项成等差数列，且公差为 2，首项为 $a_1=2$；当 n 为偶数时，由 $a_{n+2}=2a_n$ 可知，$\{a_n\}$ 的偶数项成等比数列，且公比为 2，首项为 $a_2=1$，

故前 20 项和为 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}+a_{20}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})=\left(10\times2+\dfrac{10\times9}{2}\times2\right)+\dfrac{1-2^{10}}{1-2}=110+1\ 023=1\ 133.$

6-1. D【解析】若 $q=1$，则 $T_n=nb_1$，又 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，

此时 $S_nT_n=\dfrac{db_1}{2}n^3+b_1\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n^2$，这与题设不符，

故 $q\neq1$，故 $T_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{b_1q^n}{q-1}-\dfrac{b_1}{q-1}$，

故 $S_nT_n=\left[\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n\right]\left(\dfrac{b_1q^n}{q-1}-\dfrac{b_1}{q-1}\right)=\dfrac{db_1n^2q^n}{2(q-1)}+\dfrac{\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)b_1}{q-1}nq^n-\dfrac{db_1}{2(q-1)}n^2-\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)\times\dfrac{b_1}{q-1}n.$

又 $S_nT_n=3n^29^n-2n\cdot 9^n-3n^2+2n$,

则 $\frac{db_1}{2(q-1)}=3, q=9, \frac{\left(a_1-\frac{d}{2}\right)b_1}{q-1}=-2$,

故 $db_1=48, a_1b_1=8$,此时 d, b_1, a_1 不确定. 故选 D.

6-2.【解】(1)$\because a_3+6$ 是 a_2 和 a_4 的等差中项,$\therefore 2(a_3+6)=a_2+a_4$.

$\because$ 数列$\{a_n\}$是公比 $q=3$ 的等比数列,

$\therefore 2(a_1q^2+6)=a_1q+a_1q^3$,

即 $2(9a_1+6)=3a_1+27a_1$,解得 $a_1=1$,

$\therefore a_n=3^{n-1}$.

(2)$\because b_n=a_n+2n-1$,$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+2(1+2+\cdots+n)-n=\frac{1\times(1-3^n)}{1-3}+2\times\frac{(n+1)n}{2}-n=\frac{3^n-1}{2}+n^2$.

6-3.(1)**【证明】**由题意知 $S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}a_n$,当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3}a_{n-1}-\frac{1}{3}a_n$,所以 $a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}$. 当 $n=1$ 时,$S_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}a_1=a_1$,所以 $a_1=\frac{1}{4}$,所以数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{4}$为首项,$\frac{1}{4}$为公比的等比数列,所以 $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

因为 $2+b_n=3\log_{\frac{1}{4}}a_n$,

所以 $b_n=3\log_{\frac{1}{4}}a_n-2=3\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^n-2=3n-2$,所以 $b_1=1$,又 $b_{n+1}-b_n=3(n+1)-2-3n+2=3$,所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项,3 为公差的等差数列.

(2)**【证明】**由(1)知 $c_n=a_n\cdot b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n\times(3n-2)$,

所以 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{1}{4}\times1+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times4+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times(3n-5)+\left(\frac{1}{4}\right)^n\times(3n-2)$,

所以$\frac{1}{4}T_n=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times1+\left(\frac{1}{4}\right)^3\times4+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\times(3n-5)+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\times(3n-2)$,

两式相减,可得$\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4}\times1+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times3+$

$\left(\frac{1}{4}\right)^3\times3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\times3-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\times(3n-2)=\frac{1}{4}+3\times\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{4}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\times(3n-2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4^n}-\frac{3n-2}{4^{n+1}}$,

所以 $T_n=\frac{2}{3}-\frac{3n+2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$,

所以 $T_n<\frac{2}{3}$.

(3)【解】若 $c_n\leqslant\frac{1}{4}(t^2+t-1)$ 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立,只需要 c_n 的最大值小于或等于 $\frac{1}{4}(t^2+t-1)$.

因为 $c_{n+1}-c_n=(3n+1)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{9-9n}{4^{n+1}}\leqslant0$,

所以 $c_1=c_2>c_3>c_4>\cdots$,

所以数列 $\{c_n\}$ 的最大项为 c_1 和 c_2,且 $c_1=c_2=\frac{1}{4}$.

所以 $\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}(t^2+t-1)$,

即 $t^2+t-2\geqslant0$,解得 $t\geqslant1$ 或 $t\leqslant-2$,

即实数 t 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$.

7-1. D 【解析】由题意可知此人每天走的路程构成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$,由题意和等比数列的求和公式可得 $\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=378$,解得 $a_1=192$,故此人第二天走的路程为 $192\times\frac{1}{2}=96$(里).

故选 D.

7-2. A 【解析】由题知一次性取出的金额总数约为 $2\ 000\times(1+5\%)^6+2\ 000\times(1+5\%)^5+\cdots+2\ 000\times(1+5\%)^1=\frac{2\ 000\times1.05\times[1-1.05]}{1-1.05}=\frac{2\ 000\times(1.05^7-1.05)}{0.05}\approx14\ 000$(元).结合各选项中的数据可知 A 最符合,故

选 A.

8-1. AD 【解析】A 选项,当等比数列公比为 1 时,不妨设 $a_n=1$,则 $S_n=n$,$S_{2n}=2n$,故 $\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{2n}{n}=2$,为非零常数,故存在等比数列为"和等比数列",A 正确;B 选项,例如 $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\0,n\geqslant 2,\end{cases}$ $\{a_n\}$ 为非等差、等比数列,满足 $\frac{S_{2n}}{S_n}=1$,$\{a_n\}$ 为"和等比数列",B 错误;C 选项,如 $a_n=2^{n-1}$,$\{a_n\}$ 为等比数列,但 $\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{\frac{1-2^{2n}}{1-2}}{\frac{1-2^n}{1-2}}=1+2^n$,$\{a_n\}$ 不是一个非零常数,不是"和等比数列",C 错误;D 选项,$a_n=a_1\cdot(a_1^2)^{n-1}=a_1^{2n-1}$,故 $\ln a_n=(2n-1)\ln a_1$,则 $\ln a_{n+1}-\ln a_n=(2n+1)\ln a_1-(2n-1)\ln a_1=2\ln a_1$,所以 $\{\ln a_n\}$ 为等差数列,公差为 $2\ln a_1$,故 $S_n=n\ln a_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\ln a_1=n^2\ln a_1$,$S_{2n}=(2n)^2\ln a_1=4n^2\ln a_1$,则 $\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{4n^2\ln a_1}{n^2\ln a_1}=4$,为非零常数,则数列 $\{\ln a_n\}$ 为"和等比数列",D 正确. 故选 AD.

巩固练

1. A 【解析】因为 $2S_3=3a_2+8a_1$,所以 $2(a_1+a_2+a_3)=3a_2+8a_1$,

所以 $2a_3=a_2+6a_1$,所以 $2a_1q^2=a_1q+6a_1$. 又因为 $a_n>0$,所以 $2q^2=q+6$,解得 $q=2$ 或 $q=-\frac{3}{2}$(舍).

2. B 【解析】$\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=\frac{9}{8}$,$a_n=\frac{1}{3}$,公比 $q=\frac{2}{3}$,$\therefore \frac{1}{3}=\frac{9}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{2^{n-4}}{3^{n-3}}$,$\therefore n=4$.

$\therefore \frac{S_n}{1+q^2}=\frac{S_4}{1+q^2}=\frac{a_1(1-q^4)}{(1-q)(1+q^2)}=a_1(1+q)=\frac{9}{8}\times\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{15}{8}$.

3. 1 或 $-\frac{1}{2}$ 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q.

当 $q=1$ 时,满足 $a_3=3$,$S_3=9$,此时 $a_n=3$;

当 $q\neq1$ 时，由 $a_3=3,S_3=9$，

可得 $\begin{cases}a_1q^2=3,\\ \dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}q=-\dfrac{1}{2},\\ a_1=12,\end{cases}$

此时 $a_n=12\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

综上所述，公比 q 的值为 1 或 $-\dfrac{1}{2}$.

4. (1)【证明】$\because S_{n+1}-2S_n=n+1$，

$\therefore S_n-2S_{n-1}=n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，

两式相减得 $a_{n+1}-2a_n=1(n\geqslant2)$.

又 $(a_1+a_2)-2a_1=2$ 且 $a_1=1$，

解得 $a_2=3$，即 $a_2-2a_1=1$.

$\therefore a_{n+1}-2a_n=1(n\in\mathbf{N}_+)$，

即 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$.

又 $a_1+1=2\neq0$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列.

(2)【解】由(1)知 $a_n+1=2^n$，

$\therefore b_n=n\cdot2^n$，

$T_n=2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$，①

$2T_n=2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$，②

①−②得，$-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot2^{n+1}$，故 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$.

5. D 【解析】$\because a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\dfrac{n+1}{3}$，$\therefore$ 当 $n\geqslant2$ 时，$a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-2}a_{n-1}=\dfrac{n}{3}$.

两式相减，得 $3^{n-1}a_n=\dfrac{1}{3}$，$\therefore a_n=\dfrac{1}{3^n}$. 又 $a_1=\dfrac{2}{3}$ 不满足上式，$\therefore a_n=\begin{cases}\dfrac{2}{3},n=1,\\ \dfrac{1}{3^n},n\geqslant2,\end{cases}$

$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$S_1=\dfrac{2}{3}$；当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\frac{1}{3^2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2\times3^n}$，

又 $S_1=\dfrac{2}{3}$ 也满足上式，$\therefore S_n=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2\times3^n}<\dfrac{5}{6}$，$\therefore k\geqslant\dfrac{5}{6}$，$\therefore k$ 的最小值

为$\frac{5}{6}$.

6. B 【解析】因为等比数列$\{a_n\}$的公比为$-\frac{1}{3}$,a_1,$\frac{a_2+4}{3}$,a_3成等差数列,所以$2\times\frac{-\frac{1}{3}a_1+4}{3}=a_1+\frac{1}{9}a_1$,解得$a_1=2$,所以$S_n=\frac{2\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. 当$n$为奇数时,$S_n=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$,易得$S_n$单调递减,且$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n>\frac{3}{2}$,所以$\frac{3}{2}<S_n\leqslant S_1=2$;当$n$为偶数时,$S_n=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$,易得$S_n$单调递增,且$\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{3}{2}$,所以$\frac{4}{3}=S_2\leqslant S_n<\frac{3}{2}$. 所以$S_n$的最大值与最小值分别为$2$,$\frac{4}{3}$. 函数$y=t-\frac{2}{t}$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$A\leqslant\left(S_n-\frac{2}{S_n}\right)_{\min}=\frac{4}{3}-\frac{2}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{6}$,$B\geqslant\left(S_n-\frac{2}{S_n}\right)_{\max}=2-\frac{2}{2}=1$. 所以$B-A$的最小值$1-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{6}$. 故选B.

7. $2^{n+3}-8$ 【解析】$\because x^2-2^{n+3}x+3\cdot4^{n+1}=(x-2^{n+1})(x-3\cdot2^{n+1})=0$,又$a_n<b_n$,$\therefore a_n=2^{n+1}$,$b_n=3\cdot2^{n+1}$,$\therefore c_n=b_n-a_n=2^{n+2}(n\in\mathbf{N}_+)$,

故$S_n=\frac{2^3-2^{n+3}}{1-2}=2^{n+3}-8$.

8. 4 【解析】设两只老鼠在第n天相遇,则大老鼠每天打洞的厚度构成以1为首项,2为公比的等比数列,小老鼠每天打洞的厚度构成以1为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

由等比数列的求和公式可得$\frac{1-2^n}{1-2}+$

$$\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\geqslant 10,$$

整理得$(2^n)^2-9\cdot 2^n-2\geqslant 0$,

解得 $2^n\leqslant\frac{9-\sqrt{89}}{2}$(舍去)或 $2^n\geqslant\frac{9+\sqrt{89}}{2}$,而$\frac{9+\sqrt{89}}{2}\in(9,9.5)$,所以$n\geqslant 4,n\in\mathbf{N}_+$.

所以两鼠在第 4 天穿透此墙.

9. $n^2+\frac{3^n-1}{2}$ 【解析】设$\{a_n\}$的公差为 d,$\{b_n\}$的公比为 $q(q\neq 0$ 且 $q\neq 1)$.

因为$\{b_n\}$是等比数列,$b_2=3,b_3=9$,所以 $q=3$,所以 $b_n=b_2\cdot q^{n-2}=3^{n-1}$,$b_4=27$.

又因为$\{a_n\}$是等差数列,$a_1=b_1=1$,$a_{14}=b_4=27$,

所以 $13d=a_{14}-a_1=26$,故 $d=2$,故 $a_n=2n-1$.

令 $c_n=a_n+b_n$,记$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和为 S_n,

则 $S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\frac{n(a_1+a_n)}{2}+\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=n^2+\frac{3^n-1}{2}$.

10. 【解】(1)当 $n=1$ 时,可得 $a_1=S_1=1^2-4=-3$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-4n-(n-1)^2+4(n-1)=2n-5$,

显然 $a_1=-3$ 符合上式,

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-5$.

(2)由(1)可知 $b_n=2^{2n-5}+n$,

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=2^{-3}+1+2^{-1}+2+\cdots+2^{2n-7}+n-1+2^{2n-5}+n$

$=(2^{-3}+2^{-1}+\cdots+2^{2n-7}+2^{2n-5})+(1+2+\cdots+n-1+n)=\frac{2^{-3}(1-4^n)}{1-4}+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{4^n-1}{24}+\frac{n(n+1)}{2}$,

即可得 $T_n=\frac{4^n-1}{24}+\frac{n(n+1)}{2}$.

11. (1)【解】$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是各

项都为正数的等比数列,设数列$\{a_n\}$的公差为d,数列$\{b_n\}$的公比为$q(q>0)$,

由$a_1=2,b_1=1,a_3+b_2=8,a_2=b_3$,

可得$2+2d+q=8,2+d=q^2$,解得$d=q=2$(负值舍去),则$a_n=2n,b_n=2^{n-1}$.

(2)(i)【证明】当$n=1$时,$2c_1-c_1=1$,即$c_1=1$,

当$n\geqslant 2$时,联立$\begin{cases}2c_n-S_n=n,① \\ 2c_{n-1}-S_{n-1}=n-1,②\end{cases}$

①−②,可得$2c_n-2c_{n-1}-c_n=1$,即$c_n=2c_{n-1}+1$,

所以$\dfrac{c_n+1}{c_{n-1}+1}=\dfrac{2c_{n-1}+2}{c_{n-1}+1}=2$,

又$c_1+1=2$,所以$\{c_n+1\}$是以2为首项,2为公比的等比数列.

(ii)【解】由(1)及(i)可得$c_n+1=2^n$,

则$c_n=2^n-1,d_n=2^n+n-1$,

所以$T_n=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_{n-1}+d_n$

$=2^1+0+2^2+1+2^3+2+\cdots+2^{n-1}+n-2+2^n+n-1$

$=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}+2^n)+(0+1+2+\cdots+n-2+n-1)$

$=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}+\dfrac{(n-1)n}{2}=2^{n+1}+\dfrac{(n-1)n}{2}-2.$

12. BCD 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,

当$q=-1$时,$a_n+a_{n+1}=0$,$\{a_n+a_{n+1}\}$不是等比数列,故A错误;

因为$\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q^2$,故$\{a_na_{n+1}\}$是公比为$q^2$的等比数列,故B正确;

$\dfrac{a_{n+1}^2+a_{n+2}^2}{a_n^2+a_{n+1}^2}=\dfrac{q^2(a_n^2+a_{n+1}^2)}{a_n^2+a_{n+1}^2}=q^2$,故$\{a_n^2+a_{n+1}^2\}$是公比为$q^2$的等比数列,故C正确;

若$\{S_n\}$为等比数列,则有$S_2^2=S_1\cdot S_3$,即$(a_1+a_1q)^2=a_1\cdot(a_1+a_1q+a_1q^2)$,化简得$q=0$,不合题意,所以$\{S_n\}$不为等比数列,故D正确.

13. BC 【解析】对于A,当$n=1$时,$a_1=S_1=4$;

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n+1)^2-n^2=2n+1$.

经检验，$a_1=4$ 不满足 $a_n=2n+1$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 自第二项起为等差数列，A 错误.

对于 B，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-2^{n-1}+1=2^{n-1}$.

经检验，$a_1=1$ 满足 $a_n=2^{n-1}$，$\therefore a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，B 正确.

对于 C，$S_{2n-1}=\dfrac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}=\dfrac{(2n-1)\cdot 2a_n}{2}=(2n-1)a_n$，C 正确.

对于 D，当 $a_n=(-1)^n$ 时，$S_2=0$，$S_4-S_2=0$，$S_6-S_4=0$，此时 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 不构成等比数列，D 错误.

故选 BC.

14. ABD 【解析】对于 A，$a_1=\log_4(1\times4\times4)=\log_4 4^2=2$，$a_2=\log_4(1\times4\times4\times16\times4)=\log_4 4^5=5$，A 正确；

对于 B，由题意可知 $a_{n+1}=\log_4\{(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_k\times4)[(1\times x_1)(x_1\times x_2)\cdots(x_k\times4)]\}=\log_4\left[(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_k\times4)\times\dfrac{(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_k\times4)^2}{1\times4}\right]=\log_4\dfrac{(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_k\times4)^3}{4}=3\log_4(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_k\times4)-1=3a_n-1$，故 $a_{n+1}=3a_n-1$，B 正确；

对于 C，设第 n 次“美好成长”后共插入 b_n 项，即 $k=b_n$，共有 (b_n+1) 个间隔，且 $b_1=1$，则第 $(n+1)$ 次“美好成长”需再插入 (b_n+1) 项，则 $b_{n+1}=b_n+(b_n+1)=2b_n+1$，可得 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，且 $b_1+1=2\neq0$，故数列 $\{b_n+1\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，则 $b_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，故 $k=b_n=2^n-1$，C 错误；

对于 D，$\because a_{n+1}=3a_n-1$，则 $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=3\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$，且 $a_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\neq0$，

$\therefore$ 数列 $\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$，公比为 3 的等比数列，

则 $a_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$，

即 $a_n=\frac{3^n+1}{2}$. 设 $na_n=(An+B)\cdot3^n-[A(n+1)+B]\cdot3^{n+1}+\frac{n}{2}=(-2An-3A-2B)\cdot3^n+\frac{n}{2}=\frac{n}{2}\times3^n+\frac{n}{2}$，

则 $\begin{cases}-2A=\frac{1}{2},\\-3A-2B=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=-\frac{1}{4},\\B=\frac{3}{8},\end{cases}$

故 $na_n=\frac{3-2n}{8}\cdot3^n-\frac{1-2n}{8}\cdot3^{n+1}+\frac{n}{2}$，

设数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

则 $S_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n=\left[\left(\frac{1}{8}\times3-\frac{-1}{8}\times3^2\right)+\left(\frac{-1}{8}\times3^2-\frac{-3}{8}\times3^3\right)+\cdots+\left(\frac{3-2n}{8}\cdot3^n-\frac{1-2n}{8}\cdot3^{n+1}\right)\right]+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{n}{2}\right)=\frac{3}{8}-\frac{1-2n}{8}\cdot3^{n+1}+\frac{n\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)}{2}=\frac{3^{n+1}(2n-1)+3+2n(1+n)}{8}$，即数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3^{n+1}(2n-1)+3+2n(1+n)}{8}$，D 正确. 故选 ABD.

15. $-\left(\frac{1}{2}\right)^n$（答案不唯一） 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 首项为 a_1，公比为 q. 由 $S_{n+1}<S_n$ 可得 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}<0$，$n\in\mathbf{N}_+$，$\therefore q>0, a_1<0$，$\therefore a_n<0, n\in\mathbf{N}_+$. 又 $a_{n+1}>a_n$，即 $a_1q^{n-1}(q-1)>0$，$\therefore 0<q<1$. 故首项 a_1 和公比 q 分别满足 $a_1<0$，$q\in(0,1)$ 即可（答案不唯一）.

5.4 数列的应用

易错记

1-1. C 【解析】$\because$ n 个月累积的需求量

为 S_n，∴ 第 1 个月的需求量 $a_1=S_1=\frac{1}{6}$，

第 $n(n=2,3,\cdots,12)$ 个月的需求量 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{90}(21n-n^2-5)-\frac{n-1}{90}[21(n-1)-(n-1)^2-5]=\frac{1}{30}(-n^2+15n-9)$.

∵ a_1 满足上式，∴ $a_n=\frac{1}{30}(-n^2+15n-9)$.

∵ $a_n>1.5$，∴ $\frac{1}{30}(-n^2+15n-9)>1.5$，

∴ $6<n<9(n=1,2,3,\cdots,12)$，∴ $n=7$ 或 $n=8$.

1-2.【解】由题意得，每年的维修费构成等差数列，n 年的维修总费用为 $\frac{n[0+0.2(n-1)]}{2}=0.1n^2-0.1n$（万元），

所以 $f(n)=16.9+1.2n+(0.1n^2-0.1n)=0.1n^2+1.1n+16.9$（$n$ 为正整数）.

题型诀

1-1. D　【解析】由题意可知，每月还款本金为 480 000÷(20×12)= 2 000(元)，

则 $a_n=2\ 000+[480\ 000-(n-1)\times 2\ 000]\times 0.4\%=3\ 928-8n$，故选 D.

1-2. B　【解析】由题意，可知该大学毕业生两种还款方式所还的本金最终都是 240 000 元，

∴ 两种还款方式的本金没有差额.

∵ 该大学毕业生于 2022 年 8 月初将剩余贷款一次还清，

∴ 从 2017 年 9 月初第一次还款到 2022 年 8 月初这整 5 年，即 60 个月两种还款方式所还的利息也是一样的.

∵ 每月应还本金 240 000÷120 = 2 000（元），按原约定方式，

2022 年 8 月还完后本金还剩 240 000−2 000×60=120 000(元)，

∴ 2022 年 9 月应还利息为 120 000×0.5%，

2022 年 10 月应还利息为(120 000−2 000)×0.5%，

2022 年 11 月应还利息为(120 000−2 000×2)×0.5%，

……

最后一次应还利息为(120 000−2 000×

$59)\times 0.5\%$.

后 60 个月所还的利息为 $120\ 000\times 0.5\%+(120\ 000-2\ 000)\times 0.5\%+(120\ 000-2\ 000\times 2)\times 0.5\%+\cdots+(120\ 000-2\ 000\times 59)\times 0.5\%$

$=0.5\%\times[120\ 000+(120\ 000-2\ 000)+(120\ 000-2\ 000\times 2)+\cdots+(120\ 000-2\ 000\times 59)]$

$=0.5\%\times[120\ 000\times 60-2\ 000\times(1+2+\cdots+59)]=18\ 300$(元). 故选 B.

1-3. 514 【解析】由题知小明第 1 次还款 a 元后,还欠本金及利息为 $6\ 000(1+0.5\%)-a$ 元.

第 2 次还款 a 元后,还欠本金及利息为 $6\ 000(1+0.5\%)^2-a(1+0.5\%)-a$ 元.

第 3 次还款 a 元后,还欠本金及利息为 $6\ 000(1+0.5\%)^3-a(1+0.5\%)^2-a(1+0.5\%)-a$ 元.

以此类推,则第 12 次还款 a 元后,还欠本金及利息为

$6\ 000(1+0.5\%)^{12}-a(1+0.5\%)^{11}-\cdots-a(1+0.5\%)-a$ 元.

此时已全部还清,则 $6\ 000(1+0.5\%)^{12}-a(1+0.5\%)^{11}-\cdots-a(1+0.5\%)-a=0$,即 $6\ 000(1+0.5\%)^{12}=\dfrac{a[1-(1+0.5\%)^{12}]}{1-(1+0.5\%)}$,

解得 $a=\dfrac{6\ 000\times 0.005\times 1.005^{12}}{1.005^{12}-1}\approx\dfrac{30\times 1.062}{0.062}\approx 514$(元).

2-1. 【解】根据题意,到期一次可支取本利和为

$250\times\left(72+\dfrac{72\times 73}{2}\times 0.3\%\right)=19\ 971$(元),

所以到期一次可支取本利和共为 19 971 元.

2-2. 【解】购买时先付 5 万元,余款 20 万元. 按题意分 10 次还清,每次付款数组成数列 $\{a_n\}$,

则 $a_1=2+(25-5)\times 10\%=4$(万元);

$a_2=2+(25-5-2)\times 10\%=3.8$(万元);

$a_3=2+(25-5-2\times 2)\times 10\%=3.6$(万元);

……

$a_n=2+[25-5-(n-1)\cdot 2]\times 10\%=4-$

$\frac{n-1}{5}$(万元).

因此数列$\{a_n\}$是首项为4,公差为$-\frac{1}{5}$的等差数列,

所以$a_5=4-\frac{5-1}{5}=3.2$(万元),

$S_{10}=10\times4+\frac{10\times(10-1)\times\left(-\frac{1}{5}\right)}{2}=31$(万元).所以$31+5=36$(万元).

因此第5年应付3.2万元,购房款全部付清后实际共付36万元.

3-1. CD 【解析】由题意,设第n轮感染的人数为a_n,则数列$\{a_n\}$是首项$a_1=4$,公比$q=4$的等比数列,故C正确;

所以$a_n=4^n$,当$n=3$时,$a_3=4^3=64$,故A错误;

记$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则前三轮被传染人数累计为$S_3=\frac{4\times(1-4^3)}{1-4}=84$,故B错误;

当$n=4$时,$1+S_4=1+\frac{4\times(1-4^4)}{1-4}=341<1\ 000$,当$n=\frac{35}{7}=5$时,有$1+S_5=1+\frac{4\times(1-4^5)}{1-4}=1\ 365>1\ 000$,故D正确.故选CD.

3-2.【解】(1)记该企业全部生产设备总量为“1”.

2020年底开始,经过n年后A等设备量占总设备量的百分比为a_n,

则经过1年,即2021年底该企业A等设备量$a_1=\frac{3}{10}\times\frac{96}{100}+\frac{7}{10}\times\frac{16}{100}=\frac{2}{5}$,

可得$a_{n+1}=(1-4\%)a_n+16\%(1-a_n)=\frac{4}{5}a_n+\frac{4}{25}$,即$a_{n+1}-\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\left(a_n-\frac{4}{5}\right)$,又$a_1-\frac{4}{5}=-\frac{2}{5}\neq0$,

所以数列$\left\{a_n-\frac{4}{5}\right\}$是以$-\frac{2}{5}$为首项,$\frac{4}{5}$为公比的等比数列,

可得$a_n-\frac{4}{5}=-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$,所以$a_n=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$,

显然有 $a_n<\frac{4}{5}$,所以 A 等设备量不可能超过生产设备总量的 80%.

(2)由 $a_n=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}>\frac{3}{5}$,得 $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\frac{1}{2}$.

因为 $y=\left(\frac{4}{5}\right)^{n}$ 单调递减,又 $\left(\frac{4}{5}\right)^{3}>\frac{1}{2}$,$\left(\frac{4}{5}\right)^{4}<\frac{1}{2}$,所以 $n-1\geqslant 4$,即 $n\geqslant 5$,

所以至少在 2025 年底,该企业的 A 等设备占全体设备的比例超过 60%.

4-1.【解】翻一番是在原来的基础上乘 2,翻两番是在原来的基础上乘 2^2,…,翻 n 番是在原来的基础上乘 2^n.

(1)从 2000 年年底到 2009 年年底是每三年翻一番,共翻三番,在 a 的基础上,2009 年年底人类知识总量为 $2^3a=8a$.

(2)从 2009 年年底到 2019 年年底是每一年翻一番,共翻十番,所以 2019 年年底人类知识总量为 $8a\times 2^{10}=8\ 192a$.

(3)2020 年是每 73 天翻一番,而 2020 年按 365 天计算,共翻五番,所以 2020 年年底人类知识总量为 $8\ 192a\times 2^5=262\ 144a$.

4-2.【解】甲方案 10 年中每年获利数构成首项为 1,公比为 1+30% 的等比数列,其和为 $1+(1+30\%)+(1+30\%)^2+\cdots+(1+30\%)^9=\frac{1.3^{10}-1}{1.3-1}\approx 42.63$(万元).

到期时银行贷款的本息为 $10\times(1+0.1)^{10}\approx 10\times 2.594=25.94$(万元).

所以甲方案扣除贷款本息后,净获利约为 $42.63-25.94\approx 16.7$(万元).

乙方案 10 年中逐年获利数构成等差数列,首项为 1,公差为 0.5,其和为 $1+1.5+\cdots+(1+9\times 0.5)=\frac{10\times(1+5.5)}{2}=32.50$(万元).

到期时银行贷款的本息和为 $1.1\times[1+(1+10\%)+\cdots+(1+10\%)^9]=1.1\times\frac{1.1^{10}-1}{1.1-1}\approx 17.53$(万元).

所以乙方案扣除贷款本息后,净获利约为 $32.50-17.53\approx 15.0$(万元).

比较得,甲方案净获利多于乙方案净获利.

巩固练

1. C 【解析】存入银行 8 万元,年利率为 2.50%. 若采用 1 年期自动转存业务,则第 1 年末的本利和为 8×1.025^1 万元,第 2 年末的本利和为 8×1.025^2 万元,第 3 年末的本利和为 8×1.025^3 万元,$\cdots$,第 5 年末的本利和为 8×1.025^5 万元. 故选 C.

2. B 【解析】设每年应还 x 万元,则 $x+x(1+p)+x(1+p)^2+\cdots+x(1+p)^9=M(1+p)^{10}$,整理得 $\dfrac{x[1-(1+p)^{10}]}{1-(1+p)}=M(1+p)^{10}$,解得 $x=\dfrac{Mp(1+p)^{10}}{(1+p)^{10}-1}$. 故选 B.

3. $ap+2a$ $\quad\dfrac{a}{p}[(1+p)^5-(1+p)]$ 【解析】依题意,2019 年 1 月 1 日存款 a 元后,账户中一共有 $a(1+p)+a=ap+2a$(元);

2022 年 1 月 1 日可取出钱的总数为

$a(1+p)^4+a(1+p)^3+a(1+p)^2+a(1+p)$

$=a\cdot\dfrac{(1+p)[1-(1+p)^4]}{1-(1+p)}$

$=\dfrac{a}{p}[(1+p)^5-(1+p)]$(元).

4. 【解】(1)设第 n 年的销售量为 a_n 万辆,则该汽车的年销售量构成首项为 10,公差为 10 的等差数列,所以 $a_n=10n$.

设第 n 年每辆车的平均销售利润为 b_n 元,则每辆汽车的平均销售利润构成首项为 3 000,公比为 0.9 的等比数列,所以 $b_n=3\ 000\times0.9^{n-1}$.

记第 n 年的销售利润为 c_n,则 $c_n=a_nb_n=30\ 000n\times0.9^{n-1}$ 万元,即第 n 年的销售利润为 $3n\times0.9^{n-1}$ 亿元.

(2)到 2027 年年底,设销售利润总和为 S 亿元,

则 $S=3(1+2\times0.9+3\times0.9^2+4\times0.9^3+5\times0.9^4+6\times0.9^5+7\times0.9^6)$,①

$0.9S=3(1\times0.9+2\times0.9^2+3\times0.9^3+4\times0.9^4+5\times0.9^5+6\times0.9^6+7\times0.9^7)$,②

①−②得 $0.1S=3\times\left(\frac{1-0.9^7}{1-0.9}-7\times0.9^7\right)$，解得 $S\approx55.2$(亿元)，

而总投资为 $20+30=50$(亿元)，

因为 $55.2>50$，所以到 2027 年年底，该集团能通过该品牌汽车实现盈利.

5. ACD 【解析】根据题意，经过 1 年之后，该项目的资金为 $a_1=2\ 000(1+20\%)-200=2\ 200$(万元)，A 正确；

$a_{n+1}=a_n\times(1+20\%)-200=1.2a_n-200$，B 不正确；

由 $a_{n+1}=1.2a_n-200$，可得 $a_{n+1}-1\ 000=1.2(a_n-1\ 000)$，

即数列 $\{a_n-1\ 000\}$ 是首项为 1 200，公比为 1.2 的等比数列，C 正确；

$a_n-1\ 000=1\ 200\times1.2^{n-1}=1\ 000\times1.2^n$，即 $a_n=1\ 000(1.2^n+1)$，

令 $a_n=1\ 000(1.2^n+1)\geqslant4\ 000$，则 $n\geqslant\log_{1.2}3=\frac{\lg 3}{2\lg 2+\lg 3-1}\approx6$，所以至少要经过 6 年该项目的资金才可以达到或超过翻一番的目标，D 正确. 故选 ACD.

*5.5 数学归纳法

易错记

1-1. B 【解析】由题意得，当 $n=2$ 时，不等式为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$. 故选 B.

2-1. $k+2$ 【解析】假设当 $n=k$($k\geqslant2$ 且 k 为偶数)时，等式成立，即 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=2\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)$ 成立.

由于对所有正偶数等式都成立，则归纳递推时，应该是再证明取下一个偶数时，等式也成立.

所以应证明当 $n=k+2$ 时，等式也成立.

题型诀

1-1. 【证明】(1) 当 $n=1$ 时，$\frac{1^2}{1\times3}=\frac{1\times2}{2\times3}$，

等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时等式成立,即有 $\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$,

那么当 $n=k+1$ 时,$\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2[2(k+1)+1]}$,

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

由(1)(2)可知,等式对于任意的 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

1-2.【证明】(1)当 $n=1$ 时,左边 $=2$,右边 $=\frac{1}{3}\times1\times2\times3=2$,等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时,等式成立,即 $(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(k^2+k)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$,

那么当 $n=k+1$ 时,$(1^2+1)+(2^2+2)+\cdots+(k^2+k)+[(k+1)^2+(k+1)]=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)^2+(k+1)$

$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(1+k+1)$

$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

$=\frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]$,

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

根据(1)和(2),可知等式对任意正整数 n 都成立.

2-1.【证明】(1)当 $n=2$ 时,

左边 $=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$,右边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

因为 $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$,所以不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$ 时,不等式成立,即 $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{k}$,

则当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=1-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}=1-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<1-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}=1-\frac{1}{k+1},$$

所以当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

根据(1)和(2)，可知对任意 $n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}_+$ 不等式都成立.

2-2. 【证明】(1)当 $n=2$ 时，$(1+a)^2=1+2a+a^2>1+2a$，不等式成立；

(2)假设当 $n=k$，$k\geqslant 2$，$k\in\mathbf{N}_+$，有 $(1+a)^k>1+ka$，

则当 $n=k+1$ 时，$(1+a)^{k+1}=(1+a)^k(1+a)>(1+ka)(1+a)=1+(k+1)a+ka^2>1+(k+1)a$，即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

根据(1)和(2)可得，$(1+a)^n>1+na$ 对任意 $n>1$，$n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

2-3. 【证明】(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=$ 右边，即当 $n=1$ 时，原不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，原不等式成立，即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\leqslant\frac{1}{2}+k$，则当 $n=k+1$ 时，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}<\frac{1}{2}+k+2^k\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+(k+1)$，即当 $n=k+1$ 时，原不等式成立.

综合(1)和(2)得，原不等式对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立.

3-1. 【证明】(1)①当 $n=1$ 时，$7^2-4^2-297=-264$，能被 264 整除，命题成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$7^{2k}-4^{2k}-297$ 能被 264 整除，

则当 $n=k+1$ 时，$7^{2(k+1)}-4^{2(k+1)}-297=49\times(7^{2k}-4^{2k}-297)+33\times4^{2k}+48\times297=49\times(7^{2k}-4^{2k}-297)+33\times8\times(2^{4k-3}+6\times9)=49\times(7^{2k}-4^{2k}-297)+264\times(2^{4k-3}+6\times9)$，

能被 264 整除,∴ 当 $n=k+1$ 时命题也成立.

由①②可知,对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,命题都成立.

(2)①当 $n=1$ 时,a^2+a+1 能被 a^2+a+1 整除,命题成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时,$a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}$ 能被 a^2+a+1 整除,

则当 $n=k+1$ 时,$a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}=(a+1)^2\cdot[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]+a^{k+2}-a^{k+1}(a+1)^2=(a+1)^2[a^{k+1}+(a+1)^{2k-1}]-a^{k+1}(a^2+a+1)$,能被 a^2+a+1 整除,∴ $n=k+1$ 时命题也成立.

由①②可知,对任意正整数 n,命题都成立.

4-1. (1)【解】当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2-a_1$,∴ $a_1=1$;

当 $n=2$ 时,$S_2=a_1+a_2=2-a_2$,∴ $a_2=\dfrac{1}{2}$;

当 $n=3$ 时,$S_3=a_1+a_2+a_3=2-a_3$,

∴ $a_3=\dfrac{1}{4}$;

当 $n=4$ 时,$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=2-a_4$,

∴ $a_4=\dfrac{1}{8}$. ∴ 猜想 $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)【证明】①当 $n=1$ 时,$a_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-1}=1$,结论成立;

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时结论成立,即 $a_k=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ 成立,

则当 $n=k+1$ 时,$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=(2-a_{k+1})-(2-a_k)=a_k-a_{k+1}$,

∴ $2a_{k+1}=a_k=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$,

∴ $a_{k+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(k+1)-1}$,即当 $n=k+1$ 时,结论成立.

由①②可知,对任何 $n\in\mathbf{N}_+$结论均成立.

4-2. (1)【解】根据题意,由 $\dfrac{S_n}{a_n}=n^2(n\in\mathbf{N}_+)$,$a_1=1$ 得,$S_1=a_1=1$,由 $S_2=2^2a_2=$

$4(S_2-S_1)=4(S_2-1)$,得 $S_2=\frac{4}{3}$,由 $S_3=3^2a_3=9(S_3-S_2)=9\left(S_3-\frac{4}{3}\right)$,得 $S_3=\frac{3}{2}$,由 $S_4=4^2a_4=16(S_4-S_3)=16\left(S_4-\frac{3}{2}\right)$,得 $S_4=\frac{8}{5}$,猜想 $S_n=\frac{2n}{n+1}$.

(2)【证明】①当 $n=1$ 时,$S_1=1=\frac{2\times1}{1+1}$,猜想正确. ②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时,猜想成立,即 $S_k=\frac{2k}{k+1}$;那么当 $n=k+1$ 时,$S_{k+1}=(k+1)^2a_{k+1}=(k+1)^2(S_{k+1}-S_k)=(k+1)^2\left(S_{k+1}-\frac{2k}{k+1}\right)$,即 $(k^2+2k)S_{k+1}=2k(k+1)$,$\therefore S_{k+1}=\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$,

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时,猜想也正确.

由①②可知,对一切 $n\in\mathbf{N}_+$,都有 $S_n=\frac{2n}{n+1}$成立.

巩固练

1. D 【解析】根据左边式子的规律可得,当 $n=1$ 时,左边 $=1+2+3+4$.

2. B 【解析】n 为正奇数,由假设当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}_+)$ 时成立,推导出当 $n=2k+1$ 时成立,就完成了归纳递推.

3. D 【解析】由题意可得,当 $n=k$ 时,左边 $=(k+1)(k+2)\cdot\cdots\cdot(k+k)$,

当 $n=k+1$ 时,左边 $=(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdot(k+k)(k+1+k)(k+1+k+1)$,从而可得增加的因式为 $(2k+1)(2k+2)$,且减少的因式为 $(k+1)$,故选 D.

4. $25(3^{4k+2}+5^{2k+1})+56\times3^{4k+2}$ 【解析】当 $n=k+1$ 时,$3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}=81\times3^{4k+2}+25\times5^{2k+1}=25(3^{4k+2}+5^{2k+1})+56\times3^{4k+2}$.

5. (1)【解】$\because a_1=\frac{1}{3}$,前 n 项和 $S_n=(2n^2-n)a_n$,$\therefore$ 令 $n=2$,得 $a_1+a_2=6a_2$,$\therefore a_2=\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{15}$;令 $n=3$,得 a_1+

$a_2+a_3=15a_3$，∴ $a_3=\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{35}$；令 $n=4$，得 $a_1+a_2+a_3+a_4=28a_4$，∴ $a_4=\frac{1}{7\times9}=\frac{1}{63}$. 猜想 $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

(2)【证明】①当 $n=1$ 时，结论成立；

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时，结论成立，即 $a_k=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$，$S_k=(2k^2-k)a_k=\frac{k}{2k+1}$，则当 $n=k+1$ 时，$S_{k+1}=[2(k+1)^2-(k+1)]a_{k+1}$，又 $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=\frac{k}{2k+1}+a_{k+1}=[2(k+1)^2-(k+1)]a_{k+1}$，∴ $k(2k+3)a_{k+1}=\frac{k}{2k+1}$，

∴ $a_{k+1}=\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$，

∴ 当 $n=k+1$ 时结论成立. 由①②可知，对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都有 $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$成立.

6. AB 【解析】因为 $1+2\times3+3\times3^2+4\times3^3+\cdots+n\times3^{n-1}=3^n(na-b)+\frac{1}{4}$对一切 $n\in\mathbf{N}_+$都成立，

所以当 $n=1,2$ 时有

$$\begin{cases}1=3(a-b)+\frac{1}{4},\\1+2\times3=3^2(2a-b)+\frac{1}{4},\end{cases}$$

即$\begin{cases}1=3a-3b+\frac{1}{4},\\7=18a-9b+\frac{1}{4},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=\frac{1}{4}.\end{cases}$

经检验 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$符合题意.